UNE MÉTHODE POUR CALCULER UNE RISTOURNE ADÉQUATE POUR ANNÉES SANS SINISTRES

Dr. F. Bichsel

Suisse

En Suisse, les sociétés d'assurances bonifient à leurs assurés en responsabilité civile autos une ristourne qui dépend du nombre des années sans sinistres, suivant le barème [1] ci-après:

Nombre des années subséquentes sans sinistres	Ristourne en % de la prime
1	—
2	10%
3-4	15%
5-6	20%
7-8	25%
9 et plus	30%

Cette ristourne a pour but de tenir compte des facteurs d'ordre subjectif qui influencent le risque et qui ne peuvent être pris en considération dans les tarifs.

Les deux questions suivantes se posent:

A) Y a-t-il en réalité des différences dans le risque subjectif justifiant la bonification d'une ristourne pour années sans sinistres?

B) Si oui, le barème indiqué ci-haut tient-il compte de ces différences d'une façon adéquate?

Le présent travail a pour but de répondre à ces deux questions en appliquant les méthodes modernes des tirages au sort.

Question A

Voici les résultats de quelques tirages au sort du portefeuille de „La Générale de Berne"

[1] Depuis la rédaction de cet article, un nouveau système a été introduit en Suisse. La ristourne est remplacée par un bonus déduit d'avance, et les pourcentages ont été augmentés.

https://doi.org/10.1017/S0515036100007492 Published online by Cambridge University Press

No du tirage	1a	1b	2a	2b
Polices conclues en ..	1947	1947	1954	1954
Force en CV	4,10 — 7,09	7,10 — 15,09	4,10 — 7,09	7,10 — 15,09
Nombre total des polices de chaque tirage	160	448	299	307
k	dont avec k sinistres pendant les 3 années 1955-57			
0	107	316	174	179
1	35	88	82	71
2	8	21	24	33
3	8	12	13	15
4	2	7	3	8
5 et plus	—	4	3	1
Nombre moyen des sinistres $\bar{k}$	0,52	0,49	0,67	0,71
Variance $s^2(k)$	0,80	1,00	1,09	1,15

S'il n'y avait pas de différences dans le risque subjectif, la variable aléatoire k devrait suivre la distribution de Poisson. Toutefois, on sait que dans ce cas, $\bar{k}$ devrait être égal à $s^2(k)$, ce dont il n'est évidemment pas question pour les chiffres ci-dessus. En conséquence, k n'est pas distribué d'après Poisson, et l'existence de différences dans le risque subjectif est prouvée.

On pourrait se demander si les différences entre $\bar{k}$ et $s^2(k)$ sont de nature aléatoire. Une investigation spéciale a toutefois montré que si k suivait la distribution de Poisson, la probabilité pour des différences aussi élevées que celles des tirages indiqués ci-haut serait pratiquement nulle.

Question B

Le barème indiqué au début tient-il compte d'une façon adéquate des différences existant dans le risque subjectif?

Pour la solution de ce problème, je pouvais me baser sur un travail du Dr. Martin Hofmann paru dans le volume 55 du Bulletin de l'Association des Actuaires suisses et intitulé „Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung" (Processus de Poisson composés et leurs applications à l'assurance-accidents).

https://doi.org/10.1017/S0515036100007492 Published online by Cambridge University Press

Pour simplifier, je fais l'hypothèse que le risque subjectif n'influence que le nombre des sinistres et non pas leurs montants.

Il s'agit d'abord de trouver, pour le nombre des sinistres d'une police pendant un certain laps de temps, une distribution qui corresponde mieux à la réalité que la distribution de Poisson.

On arrive à une telle distribution si, dans la distribution de Poisson

$$w(k;t) = \frac{(\lambda t)^k \, e^{-\lambda t}}{k!} \tag{1}$$

on suppose que le paramètre λ n'est pas une constante, mais une variable aléatoire. La distribution obtenue par cette opération est appelée „distribution de Poisson composée" et la distribution de λ sa „fonction structurelle".

Dans la formule (1), λ nous donne le nombre moyen des sinistres par année, (l'année étant l'unité de temps). Supposer que ce λ n'est pas une constante pour le portefeuille, c'est admettre que le portefeuille se compose de sous-portefeuilles avec des λ différents. En d'autres termes, c'est supposer que le risque n'est pas le même pour toutes les polices du portefeuille par suite de différences dans le risque subjectif.

En choisissant comme fonction structurelle la distribution Γ

$$u(\lambda) = \left(\frac{1}{b}\right)^{q/b} \frac{\lambda^{q/b-1}}{\Gamma(q/b)} \, e^{-\lambda/b} \tag{2}$$

avec le moyen $\bar{\lambda} = q$
et la variance $\sigma_\lambda^2 = qb$

on arrive à la distribution suivante:

$$W(k;t) = \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{q/b} \left(\frac{bt}{1+bt}\right)^k \frac{\Gamma(q/b+k)}{\Gamma(q/b)\,k!} \tag{3}$$

avec le moyen $\bar{k}_2 = qt$
et la variance $\sigma_k^2 = qt\,(bt+1)$

Cette distribution est connue sous le nom de distribution binomiale négative ou distribution de Polya et Eggenberger.

Pourquoi choisir la distribution Γ comme fonction structurelle?

En voici les raisons:

a) la distribution Γ donne pour des valeurs négatives de λ la probabilité nulle, ce qui correspond au problème;

b) la distribution Γ aboutit dans ce qui suit à des expressions simples;

c) la distribution (3) obtenue avec la distribution Γ comme fonction structurelle n'est pas en contradiction avec les tirages au sort mentionnés au début de ce travail, ce qui a été vérifié par le test de χ^2.

Or, nous cherchons *la probabilité* $W(k; t/0; t')$ qu'une police qui n'a pas été frappée de sinistres pendant t' années aura k sinistres pendant les t années suivantes.

temps	t'	t
nombre des sinistres	0	k

Soit:

$W(k; t'+t/0; t')$ = la probabilité qu'il y a k sinistres pendant le laps de temps $(t'+t)$, sous condition qu'il n'y ait point de sinistres pendant t'; $W(0; t')$ = la probabilité qu'il n'y a point de sinistres pendant t';

$W(0; t'/k; t'+t)$ = la probabilité qu'il n'y a point de sinistres pendant t', sous condition qu'il y ait k sinistres pendant le laps de temps entier $(t'+t)$;

$W(k; t'+t)$ = la probabilité qu'il y a k sinistres pendant $(t'+t)$.

D'après un théorème du calcul des probabilités, nous avons:

$$\begin{aligned} & W(k; t'+t/0; t') \,.\, W(0; t') \\ &= W(0; t'/k; t'+t) \,.\, W(k; t'+t) \\ &(= W[(0; t') \;\&\; (k; t'+t)]) \end{aligned}$$

d'où nous dérivons l'expression suivante pour la probabilité cherchée

$$W(k; t/0; t') = W(k; t'+t/0; t') = \frac{W(0; t'/k; t'+t) \,.\, W(k; t'+t)}{W(0; t')} \qquad (4)$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100007492 Published online by Cambridge University Press

La probabilité $W(0; t'/k; t'+t)$, c'est-à-dire la probabilité que k sinistres survenant pendant $(t'+t)$ se concentrent exclusivement à l'intervalle t, est évidemment égale à

$$\left(\frac{t}{t'+t}\right)^k$$

(Nous supposons que la probabilité de survenance d'un sinistre est constante pendant tout le laps de temps $t'+t$).

En introduisant dans la formule (4) pour $W(k; t'+t)$ et $W(0; t')$ les expressions données par (3), nous obtenons:

$$W(k; t/0; t') = \left(\frac{1+bt}{1+b\,(t'+t)}\right)^{q/b} \left(\frac{bt}{1+b\,(t'+t)}\right)^k \frac{\Gamma(q/b+k)}{\Gamma(q/b)\,k!} \tag{5}$$

Nous constatons que cette expression a la même structure que (3) et que nous l'obtenons en introduisant dans (1), au lieu de λ, dont la distribution est donnée par (2), la nouvelle variable aléatoire

$$\lambda' = \lambda\,\frac{1}{1+bt'} \tag{6}$$

λ nous donnait la fréquence des sinistres dans le portefeuille entier — λ' nous donne la fréquence des sinistres dans le sous-portefeuille des polices restées sans sinistres pendant t' années.

Il s'en suit que la fréquence moyenne des sinistres dans le dit sous-portefeuille est réduite dans la proportion $1 : 1+bt'$ par rapport à la fréquence moyenne dans le portefeuille entier.

Au premier abord, on pourrait conclure de ce fait qu'il faudrait accorder aux polices restées sans sinistres pendant t' années une ristourne de

$$\left(1 - \frac{1}{1+bt'}\right) \text{ de la prime} \tag{7}$$

Toutefois, il faut tenir compte du fait que λ' n'est pas une constante, mais une variable aléatoire, ce qui signifie que, dans le sous-portefeuille des polices restées sans sinistres pendant t' années, il y a des polices dont la „probabilité individuelle de sinistres" est bien supérieure à la probabilité moyenne. En d'autres termes, dans le dit sous-portefeuille, il y a des polices qui sont restées sans sinistres par hasard et non pas pour cause d'un risque subjectif meilleur.

Ces réflexions m'ont amené à établir pour le calcul d'une ristourne adéquate les règles suivantes:

a) Une ristourne est accordée seulement si t' est si élevé que la probabilité d'une λ' supérieure au moyen de λ est inférieure à 10%. En d'autres termes: la limite supérieure de 10% de la distribution de λ' doit être inférieure au moyen de λ.

b) La ristourne est égale à la différence entre la fréquence moyenne de sinistres du portefeuille entier et la limite supérieure de 10% de la distribution de λ'.

En appliquant ces règles, on limite à 10% les cas où une ristourne accordée est trop élevée par rapport au risque individuel de la police en question.

L'évaluation numérique des tirages 2a et 2b, basée sur les règles et formules précitées, conduit au même résultat pour les deux tirages, à savoir, au barème suivant pour une ristourne adéquate:

Nombre des années subséquentes sans sinistres	Ristourne en % de la prime
1-5	—
6	3,5%
7	12%
8	19%
9	25%
10	30%

En conclusion, je dois mentionner un fait dont je n'ai pas tenu compte dans mes calculs, mais qui influence sérieusement les résultats obtenus. C'est le fait que les automobilistes n'ayant pas eu de sinistres pendant un certain nombre d'années règlent eux-mêmes les sinistres d'un montant modéré, afin de ne pas perdre la ristourne.

Par ce fait, le barème ci-dessus ne donne pas la ristourne adéquate elle-même, mais seulement une limite supérieure pour une ristourne adéquate.

Pour la même raison, les tirages 1a et 1b conduisent à des ristournes bien supérieures à celles du barème ci-dessus dérivées des tirages 2a et 2b, parce qu'il s'agit là de polices conclues en 1947 et étant donc en vigueur depuis de nombreuses années.

Pour remédier à l'inconvénient causé par le fait précité, il y aurait deux moyens:

a) considérer non seulement le nombre des sinistres, mais aussi leurs montants.

b) écarter des calculs, les sinistres d'un montant modéré.

En procédant ainsi, il faudrait toutefois se baser sur des tirages d'une étendue beaucoup plus élevée que celle des tirages mentionnés au début de ce travail.