N. Bardy
Nagoya Math. J.
Vol. 156 (1999), 1–83

SOUS-ALGÈBRES BIRÉGULIÈRES D'UNE ALGÈBRE DE KAC-MOODY-BORCHERDS

NICOLE BARDY

Abstract. Let $\mathfrak{g}$ be a Kac-Moody-Borcherds algebra on a field $\mathbb{K}$ associated to a symetrizable matrix and with Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$. Let $\mathfrak{L}$ be an ad $\mathfrak{h}$-invariant subalgebra such that the restriction to $\mathfrak{L}$ of the standard bilinear form is nondegenerate. We show that the root system Ψ of $(\mathfrak{L}, \mathfrak{h})$ is a subsystem according to [Ba] of $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Moreover, if a subsystem Ω satisfies some conditions (i.e. Ω is "réduit et presque-clos") of Ψ, we construct inside of $\mathfrak{L}$ a Kac-Moody-Borcherds algebra with root system Ω.

Let k be a subfield of $\mathbb{K}$. We prove similar results in the case of an action of a finite group of k-semi-automorphisms. In particular, we obtain a generalization to the Kac-Moody case of a result by Borel and Tits.

Let $\mathfrak{g}$ be an almost-k-split form of a Kac-Moody algebra. We construct a Kac-Moody k-algebra with root system similar to the system of $\mathfrak{g}$ (save on some multiples of certain roots).

§0. Introduction

Les sous-algèbres régulières selon Dynkin puis Naito

Dans la classification des sous-algèbres semi-simples d'une algèbre de Lie semi-simple obtenue par Dynkin ([D] ou [T]), les sous-algèbres quelconques dont la décomposition en sous-espaces radiciels est compatible à celle de l'algèbre initiale sont dites régulières.

Naito (cf. [N]) propose, dans le cadre de la théorie des algèbres de Kac-Moody, une définition de sous-algèbre régulière basée sur la définition des sous-systèmes introduite par Morita [M] et rappelée ici.

Si A est une matrice de Kac-Moody, supposée symétrisable, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ désigne l'algèbre de Kac-Moody associée, $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan standard de $\mathfrak{g}$ et $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines. Naito généralise la notion de sous-ensemble fondamental (ou base) définie par Morita [M] en y admettant des racines imaginaires, mais suppose toujours cette partie libre dans $\mathfrak{h}^*$. À un tel sous-ensemble Π' de Δ, il associe une sous-algèbre $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{g}$, stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{h}$ et qui est une algèbre de Kac-Moody (ou de

Received June 26, 1998.

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

Kac-Moody-Borcherds [Bo] si le système fondamental contient des racines imaginaires) engendrée par les espaces radiciels correspondant à $\pm\Pi'$ (ou une partie de ces espaces pour ceux correspondant à une racine imaginaire) et un sous-espace $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{h}$ (qui est la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{L}$); cette sous-algèbre est alors dite régulière.

Les sous-algèbres birégulières

La construction d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds (en abrégé KMB) peut être généralisée au cas d'une "réalisation non libre" ([Bo] ou [Ba]) (l'algèbre dépendant alors de la réalisation).

Dans une telle algèbre, il est naturel de s'intéresser aux sous-algèbres qui possèdent une "structure induite analogue". C'est pourquoi, nous nous proposons ici d'élargir la notion précédente de sous-algèbre régulière en utilisant la définition des sous-systèmes de racines développée dans [Ba]. Les résultats énoncés dans la suite de cette introduction ne sont vrais que si la réalisation satisfait à certaines conditions exposées dans le paragraphe 1 (en particulier au n°9).

Une sous-algèbre $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{g}$ sera dite birégulière si elle est stable par $\mathfrak{h}$ et si la restriction à $\mathfrak{L}$ de la forme bilinéaire invariante standard ([K; 11.7, 11.13.2]) est non dégénérée (cette dernière hypothèse généralise celle de semi-simplicité). Cette première définition apparait de façon évidente comme la généralisation en dimension infinie de celle de Dynkin pour les sous-algèbres régulières semi-simples.

Nous montrons en (2.3) qu'une sous-algèbre birégulière admet pour système de racines un sous-système Ψ au sens de [Ba; § 12] qui, de plus, est "clos réellement" (cf. § 2).

D'autre part, supposons donnée une sous-algèbre birégulière $\mathfrak{L}$ de système de racines Ψ. Alors, pour tout sous-système Ω "réduit" et "presque-clos" de Ψ (cf. § 3), il est possible de construire dans $\mathfrak{L}$, une sous-algèbre dite "très régulière", qui est une algèbre de Kac-Moody-Borcherds admettant pour Ω système de racines. Cette construction généralise alors celle d'une sous-algèbre régulière proposée par Naito dans le cas d'un sous-système à base libre.

Action d'un groupe fini Γ de semi-automorphismes

L'étude des systèmes de racines relatives qui correspondent aux formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody ([B$_3$R]) et la stabilité de la notion de systèmes de racines lors des passages aux quotients par un groupe fini d'automorphismes de diagramme ou par une "partie de type fini" (étudiée dans [Ba; § 6.1 et § 6.2]) permettent d'affirmer que ces systèmes de racines relatives relèvent de la théorie axiomatique de [Ba]. Ceci nous incite à considérer des sous-algèbres stables sous l'action du groupe de Galois correspondant et associées à des sous-systèmes du système de racines restreintes.

En fait, pour k un sous-corps de $\mathbb{K}$, le corps de base, nous nous intéressons au §4 à l'action d'un groupe fini Γ de k-semi-automorphismes d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds généralisant un peu le cas de l'action du groupe de Galois dans le cadre des formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody. Pour un tel groupe Γ (dit compatible à la réalisation), nous montrons en (4.1) l'existence d'une forme bilinéaire invariante non dégénérée de $\mathfrak{g}$ qui est de plus invariante sous l'action de Γ.

Nous définissons alors, toujours par analogie avec l'étude des formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody une deuxième action ($\mathbb{K}$-linéaire) de Γ dite "action étoile" et nous considérons la sous-algèbre $\mathfrak{t}$ des points fixes de $\mathfrak{h}$ sous les deux actions de Γ.

Dans le cas d'un quotient par un groupe fini de semi-automorphismes de diagramme (à rapprocher des formes quasi-déployées), le système de racines relatives noté $\bar{\Delta}$ est alors l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{t}$ des racines (et $\mathfrak{t}$ joue le rôle de la sous-algèbre torique déployée maximale).

Une k-sous-algèbre $\mathfrak{L}$ est dite Γ-birégulière si elle est stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{t}$, sous l'action du groupe Γ et si de plus, la restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{L}$ est à valeurs dans k et non dégénérée.

Les résultats analogues aux précédents sont établis aux paragraphes 5 et 6 :

(5.3) l'ensemble des racines relatives intervenant dans la décomposition d'une sous-algèbre "Γ-birégulière" est un sous-système de racines du système des racines relatives;

(6.1) supposons donnés $\mathfrak{L}$ une sous-algèbre Γ-birégulière, Ψ son système de racines et Ω un sous-sytème "réduit" et "presque-clos" (cf. § 3) de Ψ. On construit une k-sous-algèbre de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ (la $\mathbb{K}$-sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{L}$) qui est une algèbre de Kac-Moody-Borcherds admettant Ω pour système de racines et qui est dite Γ-très-régulière lorsqu'elle est stable sous l'action de Γ.

Il est bien-sûr plus intéressant de pouvoir construire cette sous-algèbre à l'intérieur même de $\mathfrak{L}$, nous indiquons un certain nombre de cas où cela est possible. Nous déterminons également des conditions sous lesquelles on

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

peut construire une sous-algèbre "Γ-très-régulière" incluse dans $\mathfrak{g}^\Gamma$ admettant pour système de racines un sous-système de $\bar{\Delta}$ donné. Notons que ces conditions sont en particulier toujours vérifiées dans le cas d'une forme quasi-déployée d'une algèbre de Kac-Moody (6.3).

Nous terminons cette étude de l'action d'un groupe fini de k-semi-automorphismes par le cas où l'on a de plus un quotient par "une partie de type fini" (en généralisant la notion de semi-automorphismes de première espèce que l'on rencontre dans l'étude des formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody). Hélas, seuls des résultats analogues, mais plus partiels, encore peuvent être obtenus :

- sous des hypothèses supplémentaires, nous démontrons encore que le système de racines d'une sous-algèbre Γ-birégulière est un sous-système de Δ' (8.7);

- par contre, la construction d'une sous-algèbre Γ-très-régulière parait nécessiter des hypothèses vraiment trop exigeantes pour être intéressante c'est pourquoi nous nous contentons de traiter le cas des formes presque-déployées dans le paragraphe suivant (§9).

Application aux formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody

Étant donnée $\mathfrak{g}$ une k-forme presque-déployée d'une algèbre de Kac-Moody dont le système de racines Δ' admet pour base $(\alpha'_{i'})_{i'\in I'}$, nous construisons (au § 9), à l'intérieur de $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Kac-Moody-Borcherds dont le système de racines est un sous-système de Δ' engendré par une famille $(n_{i'}\alpha'_{i'})_{i'\in I'}$ où les $n_{i'}$ sont des entiers strictement positifs. Nous généralisons ainsi, au cas des algèbres de Kac-Moody (en 9.2), un résultat obtenu dans le cas classique par Borel et Tits [B−T] et nous utilisons pour cela les techniques des § 5 et 8, ce qui justifie les efforts déployés dans ces paragraphes.

Le thème général de cet article et plus particulièrement le problème de la construction de formes déployées à l'intérieur de formes presque déployées d'algèbres de Kac-Moody m'ontété suggérés par Guy Rousseau. Je tiens à le remercier pour les nombreuses discussions que nous avons eues à ce sujet et pour l'attention qu'il a bien voulu porter à ce travail.

§1. Algèbres de Kac-Moody-Borcherds

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps de base commutatif et de caractéristique nulle, parfois supposé inclus dans $\mathbb{C}$; l'ensemble des rationnels positifs ou nuls (resp. négatifs ou nuls) est noté $\mathbb{Q}_+$ (resp. $\mathbb{Q}_-$).

Nous rappelons ici des notions bien connues dans le cadre des algèbres de Kac-Moody mais aussi (à partir du n°7) les définitions introduites dans [Ba] *et utilisées tout au long de cet article. Au n°9, nous introduisons deux hypothèses supplémentaires; la première permet de simplifier les notations (quelque peu pénibles) nécessaires au cadre général et données au n°6; la seconde (notée* (BN)) *est très utile pour pouvoir travailler dans un système générateur de racines (cf.* [Ba; 4.3.8]).

1) Une matrice $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}$, (où $\mathfrak{I}$ est un ensemble d'indices fini ou dénombrable) est dite *de Borcherds* si elle vérifie les propriétés suivantes :

(B1) $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$;

(B2) $a_{ij} \in \mathbb{Q}_-$ pour tout $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$ tel que $i \neq j$;

(B3) si $a_{i,i} > 0$, alors $a_{ii} = 2$ et $a_{i,j}$ est entier pour tout $j \in \mathfrak{I}$;

(B4) si $a_{ij} = 0$, alors a_{ji} est nul.

Lorsque $a_{ii} > 0$, l'indice i est dit *réel*, on note $i \in \mathfrak{I}_{\mathrm{re}}$. Si $a_{ii} \leq 0$, alors i appartient à $\mathfrak{I}_{\mathrm{im}}$ et i est dit *imaginaire.*

La matrice A est dite *symétrisable* (resp. *de Cartan*) s'il existe des coefficients rationnels strictement positifs ε_i pour lesquels la matrice $B = (b_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}$ avec $b_{ij} = \varepsilon_i a_{ij}$ est symétrique (resp. symétrique définie positive).

2) Une *réalisation* [Ba; 1.1.4] d'une telle matrice est la donnée $R = (\mathfrak{h}\,;\,\mathfrak{h}\hat{\ };\,\langle .,.\rangle, \Pi'\hat{\ }; \Pi')$ de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}\hat{\ }$ mis en dualité par $\langle .,.\rangle$, d'une famille $\Pi'\hat{\ } = (\alpha\hat{\ }_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ d'éléments de $\mathfrak{h}$ (appelés coracines simples), d'une famille $\Pi' = (\alpha_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ d'éléments de $\mathfrak{h}\hat{\ }$ (appelés racines simples), vérifiant : $\langle \alpha_j, \alpha\hat{\ }_i\rangle = a_{ij}$.

Pour $i \in \mathfrak{I}_{\mathrm{re}}$, on note $\alpha_i^\vee = \alpha\hat{\ }_i$ la coracine de α_i.

Une réalisation est dite *de Kac* si elle satisfait aux conditions supplémentaires :

- $|\mathfrak{I}| = n < \infty$,
- les parties Π' et $\Pi'\hat{\ }$ sont libres,
- si l désigne le rang de A, alors on a $n - l = \dim\mathfrak{h} - n$;
- $\mathfrak{h}\hat{\ } = \mathfrak{h}^*$ (le dual de $\mathfrak{h}$), cf. [K; 1.1].

Une telle réalisation est unique à isomorphisme non unique près (cf. [K] ou [Ba]).

3) Étant donnée une réalisation R d'une matrice de Kac-Moody-Borcherds, on note $\widetilde{\mathfrak{g}}(A,R)$ ou $\widetilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre (cf. [Bo] ou [Ba]) définie par

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

les générateurs $\{\mathfrak{h},\, e_i,\, f_i\,;\; (i \in \mathfrak{I})\}$ et les relations :

$$\begin{cases} [h,h'\,] = 0, & \forall (h,h') \in \mathfrak{h}^2; \\ [h,e_i\,] = \langle \alpha_i, h\,\rangle e_i, & \forall h \in \mathfrak{h},\, \forall i \in \mathfrak{I}; \\ [h,f_i\,] = -\langle \alpha_i, h\,\rangle f_i, & \forall h \in \mathfrak{h},\, \forall i \in \mathfrak{I}; \\ [e_i,f_j\,] = \delta_{ij}\alpha\,\hat{_i}, & \forall (i,j) \in \mathfrak{I}^2. \end{cases}$$

Remarque. Dans le cas symétrisable mais non symétrique, les générateurs e_i et f_i de [Bo] diffèrent de ceux-ci par un coefficient multiplicatif.

Si $\widetilde{Q}_1$ désigne le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par des éléments $\widetilde{\alpha}_i$ pour $i \in \mathfrak{I}$, on peut considérer sur $\widetilde{\mathfrak{g}}(A,R)$, la graduation d'algèbre de Lie ainsi définie : tout élément de $\mathfrak{h}$ est de degré 0 et pour chaque indice i, le générateur e_i (resp. f_i) est de degré $\widetilde{\alpha}_i$ (resp. $-\widetilde{\alpha}_i$). On note $\widetilde{Q}_{1\mathbb{Q}} = \widetilde{Q}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Cette algèbre admet un plus grand idéal $\mathfrak{r}$ (resp. $\mathfrak{r}_1$) parmi les idéaux gradués d'intersection nulle avec $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{h} \oplus (\oplus_{i\in\mathfrak{I}}(\mathbb{K}e_i \oplus \mathbb{K}f_i))$) et l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds (KMB) associée à cette réalisation est alors le quotient $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A,R)$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}(A,R)$ par $\mathfrak{r}_1$; sa graduation est celle héritée de $\widetilde{\mathfrak{g}}(A,R)$.

On a alors $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r} \oplus (\oplus_{i\in F_0}(\mathbb{K}e_i \oplus \mathbb{K}f_i))$ où $F_0 = \{i \in \mathfrak{I} \,/\, \alpha\,\hat{_i} = 0\}$. Notons que cette définition, déjà introduite dans [Ba; § 2], est compatible avec celle de Kac lorsque $F_0 = \emptyset$ (et donc pour une réalisation de Kac).

4) Dans la suite, on suppose données :

- une matrice de Borcherds A symétrisable (indexée par $\mathfrak{I}$ fini ou dénombrable) et l'on fixe un choix des ε_i et donc des b_{ij} introduits au n°1 (nous imposerons d'autres conditions sur ce choix au paragraphe 4);
- l'algèbre $\mathfrak{g}$ associée à cette matrice pour une réalisation dans laquelle :

  - quel que soit l'élément i de $\mathfrak{I}$, la coracine $\alpha\,\hat{_i}$ est non nulle (i.e. $F_0 = \emptyset$);

  - l'espace $\mathfrak{h}$ est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $(.,.)$ telle que $(\alpha\,\hat{_i}, \alpha\,\hat{_j}) = b_{ij}$.

Ceci existe en particulier dans le cadre d'une réalisation de Kac mais aussi dans la construction proposée par Borcherds (cf. [Bo]) où (cf. [Bo] et [K; 11.13]) l'idéal $\mathfrak{r}$ est exactement l'idéal engendré par les éléments :

$(\mathrm{ad}\, e_i)^{1-a_{ij}} e_j, \quad (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-a_{ij}} f_j \qquad (\text{si } i \in \mathfrak{I}_{\mathrm{re}});$

$(\mathrm{ad}\, e_i)\, e_j, \quad (\mathrm{ad}\, f_i) f_j \qquad (\text{si } i \in \mathfrak{I} \text{ et } a_{ij} = 0).$

Dans le cas général, ces éléments sont toujours dans l'idéal $\mathfrak{r}$.

5) Par définition, le groupe de Weyl (associé à A) est le groupe de Coxeter W défini par générateurs et relations :

$$W = \langle (r_i)_{i\in\mathfrak{I}_{\mathrm{re}}} \,/\, (r_ir_j)^{m_{ij}} = 1 \ \text{ si } \ m_{ij} < \infty \ \text{ pour } (i,j) \in \mathfrak{I}_{\mathrm{re}}^2 \rangle$$

où les coefficients m_{ij} sont donnés par :
$m_{ii} = 1$ et si pour $i \neq j$, on note λ l'entier positif $a_{ij}a_{ji}$ alors :

$$\begin{aligned} m_{ij} = 2 &\iff \lambda = 0\,; \\ m_{ij} = 3 &\iff \lambda = 1\,; \\ m_{ij} = 4 &\iff \lambda = 2\,; \\ m_{ij} = 6 &\iff \lambda = 3\,; \\ m_{ij} = \infty &\iff \lambda \geq 4\,. \end{aligned}$$

Dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$, $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}\hat{\ })$ et $\mathrm{GL}(\widetilde{Q}_1)$ et pour $i \in \mathfrak{I}_{\mathrm{re}}$, considérons les réflexions :
$r\check{_i}(h) = h - \langle \alpha_i, h \rangle \alpha\check{_i} \quad (\forall h \in \mathfrak{h})$;
$\rho_i(h) = h - \langle h, \alpha\check{_i} \rangle \alpha_i \quad (\forall h \in \mathfrak{h}\hat{\ })$;
$\widetilde{r}_i(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha\check{_i} \rangle \alpha_i \quad (\forall \alpha \in \widetilde{Q}_1)$, où $\langle .,. \rangle$ désigne cette fois, la dualité définie entre $\widetilde{Q}_1$ et $Q\hat{\ }$ (le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\Pi'\hat{\ }$) par $\langle \widetilde{\alpha}_i, \alpha\check{_j} \rangle = a_{ji}$ où $(i,j) \in \mathfrak{I}^2$.

Nous définissons (cf. [Ba; 1.1.5]) des actions du groupe de Weyl sur $\mathfrak{h}\hat{\ }$ (resp. $\mathfrak{h}$, resp. $\widetilde{Q}$) en considérant les représentations τ (resp. $\tau\check{\ }$, resp. $\widetilde{\tau}$) de W dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}\hat{\ })$ (resp. $\mathrm{GL}(\mathfrak{h})$, resp. $\mathrm{GL}(\widetilde{Q})$), qui à r_i associent ρ_i (resp. $r\check{_i}$, resp. $\widetilde{r}_i$). Nous nous permettrons cependant aussi de noter : $w.\alpha_i = \tau(w)\alpha_i$, $w.\alpha\check{_i} = \tau\check{\ }(w)\alpha\check{_i}$ et $w.\widetilde{\alpha}_i = \widetilde{\tau}(w)\widetilde{\alpha}_i$.

De plus, d'après les relations correspondant au quotient par l'idéal $\mathfrak{r}$, les endomorphismes $\mathrm{ad}e_i$ et $\mathrm{ad}f_i$, pour $i \in \mathfrak{I}_{\mathrm{re}}$, sont localement nilpotents et l'on peut montrer que :
$\tau_i = \exp(\mathrm{ad}\, e_i)\ \exp(\mathrm{ad}\,(-f_i))\ \exp(\mathrm{ad}\, e_i)$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui prolonge $r\check{_i}$.

Dans bien des cas (et plus exactement si le centralisateur de $\mathfrak{h}$ est bien réduit à $\mathfrak{h}$), le groupe W s'identifie par τ ou $\tau\hat{\ }$ à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}\hat{\ }$ (ou de $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{h}$ sous l'hypothèse duale). La représentation $\widetilde{\tau}$ est toujours fidèle.

6) On utilise les notations suivantes (cf. [Bo] et [Ba])

• $\Delta_1(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est le système de racines correspondant à l'action adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$; il est inclus dans $Q_1 = \sum_{i\in\mathfrak{I}} \mathbb{Z}\alpha_i \subset \mathfrak{h}\hat{\ }$; on note aussi $Q_{1\mathbb{Q}} = \sum_{i\in\mathfrak{I}} \mathbb{Q}\alpha_i$ et $Q_{1\mathbb{K}} = \sum_{i\in\mathfrak{I}} \mathbb{K}\alpha_i$.

• $\widetilde{\Delta}_1 = \widetilde{\Delta}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est le système de racines à base libre (inclus dans $\widetilde{Q}_1$) qui correspond à la graduation usuelle de l'algèbre induite par celle de $\widetilde{\mathfrak{g}}(A, R)$;

• $\widetilde{\Delta}_1^{\mathrm{re}}$ désigne l'ensemble des racines réelles c'est-à-dire conjuguées par W aux racines simples $\widetilde{\alpha}_i$ pour $i \in \mathfrak{I}_{\mathrm{re}}$;

• $\widetilde{\Delta}_1^{\mathrm{im}} = \widetilde{\Delta}_1 \setminus \widetilde{\Delta}_1^{\mathrm{re}}$ est l'ensemble des racines imaginaires.

L'ajout de $+$ (resp. $-$) en indice d'un de ces ensembles indique que seuls sont considérés les éléments pouvant être écrits comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs (resp. négatifs) de racines simples. D'autre part, si J est une partie de $\mathfrak{I}$, pour tout ensemble X précédemment introduit, $X(J)$ est l'ensemble des éléments de X obtenu à partir de la définition de X en restreignant l'ensemble des indices à J (i.e. $X(J) = X \cap \oplus_{i \in J} \mathbb{Z}\widetilde{\alpha}_i$ dans le cas de la graduation); de même, $A(J)$ désigne la matrice extraite de A en ne conservant que les lignes et colonnes qui correspondent aux indices appartenant à J.

Le *type de* J est alors le type de la matrice $A(J)$ dans la classification de Vinberg ([K; 4.3]).

Remarque. Lors de l'étude qui va suivre, nous noterons Δ le système de racines considéré dans un quotient Q de $\widetilde{Q}_1$ et de Q_1 dans lequel les éléments de la base α_i ne sont pas $\mathbb{Q}$-proportionnels (cf. n°8).

Notons que dans le cas d'une réalisation de Kac, toutes ces notions de systèmes de racines coïncident et que la plupart des remarques techniques qui vont suivre ne concernent que le cas des autres réalisations.

Dans la suite de l'article (*cf.* n°9), *nous supposerons la réalisation telle que* $\mathfrak{h}\hat{\ } = \mathfrak{h}^*$*; cependant, nous indiquons ici comment aborder le problème si tel n'est pas le cas. L'hypothèse* (BN) *indiquée au* n°9 *reste, elle, indispensable.*

Soit ψ l'application $\mathbb{Z}$-linéaire définie sur $\widetilde{Q}_1$ à valeurs dans $Q_1 \subset \mathfrak{h}\hat{\ }$ telle que $\psi(\widetilde{\alpha}_i) = \alpha_i$ pour tout $i \in \mathfrak{I}$. Son prolongement $\mathbb{Q}$-linéaire défini de $\widetilde{Q}_{1\mathbb{Q}}$ dans $Q_{1\mathbb{Q}} \subset \mathfrak{h}\hat{\ }$ est encore noté ψ.

Grâce à la dualité entre les deux espaces $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}\hat{\ }$, on peut également introduire l'application Λ de $\mathfrak{h}\hat{\ }$ dans $\mathfrak{h}^*$ telle que $\Lambda(h\hat{\ })(h) = \langle h\hat{\ }, h \rangle$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$.

L'algèbre $\mathfrak{g}$ admet ainsi deux décompositions :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\tilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}_1} \mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_{\alpha})$$

compatibles au sens où $\mathfrak{g}_\alpha = \oplus_{\{\tilde{\alpha}\,;\psi(\tilde{\alpha})=\alpha\}}\mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}}$, en particulier $\Delta_1 = \psi(\widetilde{\Delta}_1)$. On note alors $\Delta_1^{\mathrm{re}} = \psi(\widetilde{\Delta}_1^{\mathrm{re}})$ (resp. $\Delta_1^{\mathrm{im}} = \psi(\widetilde{\Delta}_1^{\mathrm{im}})$) les ensembles de racines réelles (resp. imaginaires). Sous des hypothèses raisonnables (indiquées au n°8), on a : $\qquad \Delta_1 = \Delta_1^{\mathrm{re}} \sqcup \Delta_1^{\mathrm{im}}$.

À une racine réelle $\beta = w.\alpha_i$ est associée la réflexion $r_\beta = wr_iw^{-1} \in W$.

La forme bilinéaire graduée invariante standard (prolongeant celle de $\mathfrak{h}$ [K; 2.2]) est notée $(.,.)$; pour chaque racine α, elle induit une dualité non dégénérée entre $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ avec en particulier $(e_i, f_i) = \varepsilon_i > 0$.

Non dégénérée sur $\mathfrak{h}$, la forme $(.,.)$ induit aussi une injection ν de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}^*$ (qui est un isomorphisme lorsque $dim(\mathfrak{h}) < \infty$). Par invariance de la forme bilinéaire non dégénérée, on sait que $(h, [e_i, f_i]) = ([h, e_i], f_i) = (e_i, f_i)\langle\alpha_i, h\rangle$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$ et tout $i \in I$. Par suite, dans $\mathfrak{h}^*$, on a $\nu([e_i, f_i]) = (e_i, f_i)\Lambda(\alpha_i)$; d'où par injectivité de ν :

$$\alpha\,\hat{i} = [e_i, f_i] = (e_i, f_i)\nu^{-1}(\Lambda(\alpha_i)) = \varepsilon_i\nu^{-1}(\Lambda(\alpha_i)).$$

Pour tout $\beta \in \sum_i \mathbb{K}\alpha_i$, il existe alors un unique élément $\nu_{-1}(\beta)$ de $\mathfrak{h}$ tel que $\nu(\nu_{-1}(\beta)) = \Lambda(\beta)$.

De la même façon, on a aisément :

$$\text{pour } X \in \mathfrak{g}_\alpha \text{ et } Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}\,, \quad [X, Y] = (X, Y)\nu^{-1}(\Lambda(\alpha)) = (X, Y)\nu_{-1}(\alpha).$$

Enfin, lorsque $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, sont définies (comme dans [K]) :

- *la semi-involution de Cartan standard* qui est un antiautomorphisme ω de $\mathfrak{g}$ d'ordre 2, qui agit par -1 sur $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} = \sum_{i\in\mathfrak{I}} \mathbb{R}\alpha\,\hat{i}$ et qui envoie e_i sur $-f_i$ (la définition complète de ω sur $\mathfrak{h}$ sera précisée à la suite du lemme 4.1);
- *la forme hermitienne invariante standard* : $(.,.)_0 = -(.,\omega(.))$ dont la restriction à $\mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^- = \oplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$ est définie positive ([K; 11.7, 11.13.2],

7) L'axiomatique des systèmes de racines de [Ba] est essentiellement fondée sur la notion de *système générateur de racines* (notée en abrégé S.G.R.). Nous rappelons ici sa définition ainsi que les principaux "outils" dont nous disposons dans cette théorie (en particulier, au n°10, la définition d'"une coracine" pour toute racine).

Nous verrons que la notion de S.G.R. est très proche de celle de réalisation possèdant les deux propriétés (A) et (B) présentées plus loin (n°7 et 8).

Notons que la plupart des "raffinements" nécessaires (cf. n°8) ne le sont que dans le cadre de réalisations non libres où il faut se convaincre que le système de racines relève bien de l'axiomatique précitée (en modifiant un peu sa base).

Enfin, l'hypothèse (BN) introduite au n°9 (nécessaire dans cet article) est à comprendre comme la généralisation de l'existence d'une hauteur sur l'ensemble des racines positives dans le cas classique (base du système de racines libre, ensemble $\mathfrak{I}$ fini et $\mathfrak{h}\hat{\ } = \mathfrak{h}^*$).

Le lecteur interressé par ce dernier cas (*ou même, en première lecture*) *pourra sans inconvénient passer directement de ce n°7 au n°10* (*avec les conventions suivantes :* $I = \mathfrak{I}$, $\Pi = \Pi'$, θ *désigne la fonction hauteur usuelle*). *Notons néanmoins que les n°8 et 9 ne portent que sur des modifications de détails, techniques mais sans réelles difficultés.*

Un *système générateur de racines* correspond à la donnée [Ba; 4.1 et fin de 4.4] :

• d'une matrice A (indexée par I un ensemble d'indices fini ou dénombrable) de Kac-Moody-Borcherds relative, i.e. vérifiant les axiomes (B1), (B2), (B4) (indiqués au n°1) et

(B3) cf. n°1 si $\mathbb{K}$ n'est pas ordonné (voir aussi la remarque ci-dessous);

(B'3) si $a_{ii} > 0$, alors $a_{ii} \in \{1, 2\}$, $\dfrac{2a_{i,j}}{a_{ii}} \in \mathbb{Z}$ et ($a_{ii} = 1 \Longrightarrow a_{ij} \neq -1/2$), si $\mathbb{K}$ est ordonné;

• d'une réalisation $R = (\mathfrak{h}\,; \mathfrak{h}\hat{\ }; \langle .,. \rangle, \Pi'\hat{\ } = (\alpha\hat{\ }_i)_{i\in I}; \Pi' = (\alpha_i)_{i\in I})$ de la matrice pour laquelle les racines simples α_i ne sont pas $\mathbb{Q}$-proportionnelles et vérifient la propriété :

(A) toute combinaison linéaire à coefficients entiers positifs non tous nuls des racines simples est non nulle;

• ainsi que, pour chaque $i \in I$, d'une partie N_i de $\mathbb{Q}_+^*$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) N_i admet comme plus petit élément 1, ou bien ne contient pas sa borne inférieure, mais est minorée par 3/4 et contient 1;

b) si $a_{ii} = 1$, on a $N_i = \{1, 2\}$;

c) si $a_{ii} = 2$, on a $N_i = \{1\}$;

d) si $i \in I$ et $j \in I_{\mathrm{re}}$, alors :

- si $\mathbb{K}$ est ordonné, $2N_i a_{ji}/a_{jj} \subset \mathbb{Z}$;
- sinon, $N_i a_{ji}/a_{jj} \subset \mathbb{Z}$.

On note alors :
M_i la plus petite partie de $\mathbb{Q}_+$ contenant $N_i \cup \{0\}$ et stable par addition;
$I_1 = \{i \in I\,;\, a_{ii} = 2\}$ et $I_2 = \{i \in I\,;\, a_{ii} = 1\}$;
$\alpha_i^{\check{}} = \alpha\hat{}_i$ la coracine de α_i si $i \in I_1$ et $\alpha_i^{\check{}} = 2\alpha\hat{}_i$ si $i \in I_2$;
$Q_{\mathbb{Q}} = \sum_{i \in I} \mathbb{Q}\alpha_i$ le $\mathbb{Q}$-sous-espace de $\mathfrak{h}$ engendré par Π.

Remarque. Dans [Ba], on n'étudie les S.G.R ainsi définis (i.e. avec le rafinement que a_{ij} peut-être demi-entier pour i réel) que si le corps de base est ordonné. Mais nous avons choisi ici de considérer tous les a_{ij} dans $\mathbb{Q}$; c'est pourquoi, on peut encore raisonner avec (B'3) si les deux conditions (C) et (C$\hat{}$) suivantes sont satisfaites :

(C) les relations à coefficients dans $\mathbb{K}$ entre les éléments de Π sont engendrées par les relations à coefficients dans $\mathbb{Q}$;

(C$\hat{}$) les relations à coefficients dans $\mathbb{K}$ entre les éléments de $\Pi\hat{}$ sont engendrées par les relations à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

On peut alors se ramener au cas du corps de base $\mathbb{Q}$ en remplaçant $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}\hat{}$ par des $\mathbb{Q}$-sous-espaces vectoriels $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathfrak{h}\hat{}_{\mathbb{Q}}$ contenant respectivement les $\alpha\hat{}_i$ et les α_i, engendrant les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}\hat{}$ et sur lesquels la dualité est à valeur dans $\mathbb{Q}$ (démonstration analogue à celle du lemme 4.1 dans la suite).

1. Le cas libre. Si $\Pi' = \{\alpha_i\,;\, i \in I\}$ est libre, le *système de racines* associé est l'ensemble :

$$\Delta = W(\Pi'(I_{\mathrm{re}})) \sqcup W(2\Pi'(I_2)) \sqcup \pm W(\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i\alpha_i) \sqcup \pm W(K') \quad \text{où}$$

$$K' = \{\, \alpha \in \oplus_{j \in I} M_j\alpha_j \setminus (\sqcup_{i \in I}\mathbb{Q}_+\alpha_i)\,; \\ S_\alpha \text{ est connexe et } \langle \alpha, \alpha\hat{}_i \rangle \ \leq 0 \ (\forall i \in I_{\mathrm{re}})\,\}.$$

(On note aussi comme dans [Ba], $K_c = K' \cup (\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i\alpha_i)$.)

Le système de racines est alors l'unique sous-ensemble Δ de $Q_{\mathbb{Q}}$ vérifiant les axiomes suivants :

(SR1b) $\Delta = \Delta_+ \sqcup (-\Delta_+)$ où $\Delta_+ = \Delta \cap Q_{\mathbb{Q},+}$;

(SR2b) $\forall i \in I, \quad \mathbb{Q}_+ \alpha_i \cap \Delta = N_i \alpha_i$;

(SR3b) $\forall i \in I_{\mathrm{re}},\ \forall \alpha \in \Delta \setminus \mathbb{Z}\alpha_i$,
$\{\alpha + s\alpha_i \,/\, s \in \mathbb{Z},\ -\langle \alpha, \alpha_i\check{}\rangle \leq s \leq 0\} \subset \Delta$ si $\langle \alpha, \alpha_i\check{}\rangle \geq 0$;
$\{\alpha + s\alpha_i \,/\, s \in \mathbb{Z},\ -\langle \alpha, \alpha_i\check{}\rangle \geq s \geq 0\} \subset \Delta$ si $\langle \alpha, \alpha_i\check{}\rangle \leq 0$;

(SR4b) $\forall i \in I_{\mathrm{im}}$, $\forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \mathbb{Q}_+ \alpha_i$,
$\langle \alpha, \alpha\hat{}_i\rangle < 0 \Longleftrightarrow \alpha + M_i \alpha_i \subset \Delta_+$;
$\langle \alpha, \alpha\hat{}_i\rangle = 0 \Longrightarrow \alpha + n_i \alpha_i \notin \Delta_+ \quad (\forall n_i \in N_{i,ind})$;

(SR5b) $\forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \bigsqcup_{i \in I} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$, il existe $i \in I$ et $n_i \in N_{i,ind}$ tels que :
$\alpha - n_i \alpha_i \in \Delta$.

2. Le cas non libre. Lorsque $\Pi' = \{\alpha_i \,;\, i \in I\}$ n'est pas libre, on introduit la notion de revêtement du S.G.R. qui est une réalisation $\widetilde{R} = (\widetilde{\mathfrak{h}}; (\widetilde{\mathfrak{h}})^*; \langle ., .\rangle\,; \widetilde{\Pi}'\hat{}\,; \widetilde{\Pi}')$ où :

- $\langle ., . \rangle$ est la dualité usuelle,

- les familles $\widetilde{\Pi}'\hat{}$ et $\widetilde{\Pi}'$ sont indexées par I, sont libres dans $\widetilde{\mathfrak{h}}$ et $(\widetilde{\mathfrak{h}})^*$ et vérifient bien sûr :
$\langle \widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}\hat{}_j \rangle = \langle \alpha_i, \alpha\hat{}_j \rangle$.

Par analogie au n°6 , on note encore ψ l'application $\mathbb{Q}$-linéaire du sous-espace $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q}} = \oplus_{i \in I} \mathbb{Q}\alpha_i$ de $\widetilde{\mathfrak{h}}$ dans $\sum_I \mathbb{Q}\,\alpha_i$ qui envoie $\widetilde{\alpha}_i$ sur α_i pour chaque $i \in I$. Le système de racines Δ est alors l'image par ψ du système de racines $\widetilde{\Delta}$ obtenu dans le revêtement. (Une présentation plus axiomatique de ce système de racines est donnée dans [Ba; 4.2.15].) Tout ce qui est relatif au revêtement est caractérisé par un $\widetilde{\ }$.

Une *bonne décomposition* d'une racine α est alors une décomposition de α en fonction des α_i obtenue par projection par ψ de la décomposition d'une racine $\widetilde{\alpha}$ de $\widetilde{\Delta}$ (telle que $\psi(\widetilde{\alpha}) = \alpha$).

Un *support* de α est le support d'une bonne décomposition de α; son type (i.e. fini, affine ou indéfini) ne dépend pas de la bonne décomposition considérée.

Un système générateur de racines est dit :

- *réduit* si $I_{\mathrm{re}} = I_1$ et si pour $i \in I_{\mathrm{im}}$, la propriété $n\alpha_i \in \Delta$ avec $n \in \mathbb{Q}$ implique $n = \pm 1$;
- *normalisé* (cf. [Ba]) s'il vérifie :
(SGRN) si $i \in I_{\mathrm{im}}$, $n_i \in N_i$, et $n_i \alpha_i = \sum_{j \in S} n_j \alpha_j$ où S est une partie connexe de I (au sens de [K; 1.6] ou [Ba; 1.1]) et $n_j \in M_j^* = M_j \setminus \{0\}$ pour tout $j \in S$, alors $S = \{i\}$;

- *presque-réduit* si pour tout $\alpha_i \in \Pi$, on a $N_i = \{1\}$.

Remarques. 1. Notons que si le système admet une base $\mathbb{Q}$-libre, il est automatiquement normalisé et il est réduit si et seulement si il est presque-réduit.

2. Nous nous autorisons dans la suite à utiliser ces définitions pour un système de racines muni d'une base (sans nécessairement préciser la définition complète du S.G.R. considéré).

3. Si la dimension de $\mathfrak{h}$ est infinie (ou plus précisément si $A(I_{\mathrm{re}})$ n'est pas de rang fini), les bases de Δ ne sont pas forcément conjuguées [Ba; 5.2 (4)]. Les propriétés "Δ réduit" ou "Δ presque-réduit" dépendent donc du choix des bases (même dans le cas de systèmes normalisés). Cependant si Δ est réduit, on peut montrer que, muni de toute base pour laquelle le système est normalisé, Δ vérifie encore cette condition. Nous ne nous attarderons pas sur cette démonstration un peu technique, mais notons cependant que (dans le cas où les bases ne sont pas conjuguées) un argument important utilisé dans la démonstration est la possibilité, dans le cas symétrisable, de choisir les coracines (même pour les racines imaginaires) indépendamment de la base et de la cobase.

4. Un système de racines est presque-réduit si et seulement si dans un revêtement, le système de racines obtenu est réduit.

Lemme 1.1. *Si un S.G.R est réduit, alors il est presque-réduit et est normalisé.*

N.B.: Comme dans [Ba], on note $K_c = \{\alpha \in \Delta_+\,;\, \langle \alpha, \check{\alpha_i} \rangle \leq 0 \ (\forall i \in I_{\mathrm{re}})\}$ (i.e. $K_c = \psi(\widetilde{K}_c)$).

Démonstration. La première assertion est immédiate. De plus, $n_i\alpha_i = \sum_{j\in S} n_j\alpha_j$ avec $i \in I_{\mathrm{im}}$ et $n_j \in M_j^*$ où j parcourt une partie connexe S de I, on a $\langle n_i\alpha_i, \check{\alpha_h} \rangle \leq 0 \quad (\forall h \in I_{\mathrm{re}})$ donc, si $|S| \geq 2$, on a $n_i\alpha_i \in K_c$ (cf. ci-dessus) et ainsi $\mathbb{N}n_i\alpha_i \subset K_c \subset \Delta$ en contradiction avec l'hypothèse. □

Notons encore, dans le cadre des systèmes de racines normalisés, un résultat utile pour la suite.

Lemme 1.2. *Soit S un S.G.R de système de racines Δ et de base Π, supposé normalisé. Si α et β sont deux racines simples telles que $\alpha - \beta \in \Delta_+$, alors les racines α, β et $\alpha - \beta$ sont imaginaires et les supports respectifs de $\alpha - \beta$ et de β sont disjoints et non liés.*

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

N.B.: Dans le cas non libre, la dernière assertion signifie que tous les supports respectifs de deux bonnes décompositions de $\alpha - \beta$ et de β (i.e. provenant de $\widetilde{\Delta}$ par projection) sont disjoints et non liés.

Démonstration. Supposons donc données α et β deux racines simples telles que $\alpha - \beta \in \Delta_+$, on a alors $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$. D'après [Ba; 4.2.5], la racine α est nécessairement imaginaire. De plus, le système étant supposé normalisé, cette somme ne peut pas fournir une décomposition à support connexe. Autrement dit, cela implique $\langle \alpha - \beta, \beta\check{\ } \rangle = 0$.

A priori quatre cas sont possibles :

a) β et $\alpha - \beta$ sont réelles, alors $\langle \alpha, \beta\check{\ } \rangle = \langle \alpha - \beta, \beta\check{\ } \rangle + \langle \beta, \beta\check{\ } \rangle > 0$; ce qui est absurde puisque α et β sont des racines simples.

b) $\alpha - \beta$ est réelle et β imaginaire, alors $r_{\alpha-\beta}$ fixe β donc $r_{\alpha-\beta}(\alpha) = 2\beta - \alpha$ est une racine positive (conjuguée à α qui est imaginaire). La décomposition $\beta = (2\beta - \alpha) + (\alpha - \beta)$ contredit alors (SGRN) puisque β est une racine simple et que les deux racines positives considérées vérifient $\langle 2\beta - \alpha, (\alpha - \beta)\check{\ } \rangle = -2$ donc ont des supports liés.

c) β est réelle et $\alpha - \beta$ imaginaire, alors $r_\beta.\alpha = r_\beta(\alpha - \beta) - \beta = \alpha - 2\beta$ est une racine positive puisque conjuguée à α (qui est imaginaire). La décomposition $\alpha = (\alpha - 2\beta) + 2\beta$ contredit, comme en b), (SGRN).

d) β et $\alpha - \beta$ sont imaginaires, qui est donc le seul cas possible et pour lequel les supports de β et $\alpha - \beta$ ne doivent pas être liés. □

8) *Le système de racines à base libre d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds relève de la présentation axiomatique proposée dans* [Ba; 2.2 *et* 4.1]; *il en est de même du système de racines si la réalisation possède les deux propriétés suivantes* :

(A) toute combinaison linéaire à coefficients entiers positifs non tous nuls des racines simples est non nulle (déjà introduite au n°7);
(B) quelque soit $j \in \mathfrak{I}_{\mathrm{im}}$, $\mathbb{Q}\,\alpha_j \cap \Pi'$ n'admet pas 0 pour point d'accumulation (voir remarque 5 de [Ba; 4.1] pour la justification de ce choix d'hypothèse).

Sous ces hypothèses, nous considérons alors le S.G.R. (au sens de [Ba]) obtenu en modifiant la base de la manière suivante :

dans l'ensemble Π' (indexé par $\mathfrak{I}$) des racines qui correspondent aux générateurs de l'algèbre lors de sa construction comme au n°3, on ne garde qu'une racine α_i par demi-droite rationnelle rencontrant Π', racine choisie afin que l'ensemble $\{n \in \mathbb{Q}_+;\, n\alpha_i \in \Pi'\}$ admette 1 pour plus petit élément ou soit minoré par 3/4 s'il n'admet pas de plus petit élément.

La nouvelle base $\Pi = (\alpha_i)_{i \in I}$ est alors la famille de racines ainsi obtenue.

Pour chaque i dans I, on définit la partie $N_i = \{q \in \mathbb{Q}_+\,;\, q\alpha_i \in \Pi'\}$; le système de racines correspondant à ce S.G.R. est alors inclus dans $Q_{\mathbb{Q}} = \sum_{i\in I} \mathbb{Q}\alpha_i$ et si l'on considère le système Δ obtenu dans le revêtement de ce S.G.R., il fournit une graduation de $\mathfrak{g}$ un peu moins fine que celle définie dans la construction du n°3 (puisque par exemple $\mathfrak{g}_{\widetilde{\alpha_i}}$ n'est plus forcément de dimension 1 si $i \in I_{\mathrm{im}}$) mais qui sera suffisante dans cet article. Le système $\widetilde{\Delta}$ obtenu dans ce revêtement sera le *système de racines à base libre* considéré dans la suite.

Notons qu'en ce qui concerne les racines réelles, les quatre systèmes de racines considérés sont les mêmes (i.e. $\Delta_1^{\mathrm{re}}, \widetilde{\Delta}_1^{\mathrm{re}}, \Delta^{\mathrm{re}}, \widetilde{\Delta}^{\mathrm{re}}$ sont en bijection [Ba; 4.2.8]).

Toutes les notations introduites au n^{0}6 sont généralisées à ce cas et nous définissons de plus une action de W sur $\widetilde{Q}$ en posant, pour tout $i \in I_{\mathrm{re}}$:

$r_i.\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha} - \langle \widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}\check{_i} \rangle$ pour tout $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{Q}$.

Ainsi la notion de S.G.R. n'est essentiellement plus générale que celle de telles réalisations que par ce qu'elle admet des doubles de racines réelles.

9) Considérons, comme au n°4, une matrice de KMB A symétrisable et une réalisation R (avec $\alpha\hat{_i} \neq 0$ pour tout $i \in \mathfrak{I}$) de celle-ci munie d'une forme bilinéaire invariante non dégénérée et vérifiant de plus les propriétés (A) et (B) précédentes cf. n°8 (qui permettent en particulier d'affirmer que les espaces propres $\mathfrak{g}_\alpha$ alors obtenus (pour $\alpha \neq 0$) sont de dimensions finies et que les deux ensembles de racines réelles et imaginaires sont disjoints).

On suppose de plus que :

- $\mathfrak{h}\hat{}$ est le dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$ (i.e. avec les notations introduites au n°6, on a $\Lambda = Id$); cette hypothèse permet de simplifier un certain nombre d'énoncés; sans elle, il faudrait imposer l'hypothèse supplémentaire (A*) obtenue en remplaçant dans (A) les racines par les coracines (ou encore par les images des racines par Λ); $\mathfrak{h}\hat{}$ par $\mathfrak{h}$ et A par sa transposée A^t, c'est-à-dire qu'aucune combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}^*$ de coracines $\alpha\hat{_i}$ ni aucun des $\nu^{-1}(\alpha)$ pour $\alpha \in \Delta$ ne s'annule) (voir aussi [Ba, 4.1]);
- la condition suivante (qui implique les conditions (A) et (B)) est vérifiée :

(BN) il existe un élément $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{R}$ et une application $\mathbb{Q}$-linéaire θ de $Q_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $i \in \mathfrak{I}$, on a $\theta(\alpha_i) > \varepsilon$. (Une formulation un peu plus générale et suffisante est donnée dans [Ba]). L'application θ est alors appelée une “hauteur”. Quitte à multiplier θ par une constante positive, on peut supposer $\theta(\alpha_i) \geq 1$ pour tout $i \in I$; on a alors $\theta(\Delta_+) \subset]3/4; +\infty[$.

L'hypothèse (BN) (ainsi que (A) et (B)) est en particulier vérifiée quelle que soit la dimension de $\mathfrak{h}$ dans le cas d'une réalisation telle que $\Pi'(= \Pi)$ est libre dans $\mathfrak{h}$ puisqu'il suffit de considérer la notion usuelle de hauteur. La condition (BN) permet de démontrer l'existence d'un S.G.R. normalisé admettant pour système de racines le même que celui du système générateur initial (cf. [Ba; 4.3.8]).

Comme au n°6, l'algèbre $\mathfrak{g}$ admet deux décompositions (suivant Δ et $\widetilde{\Delta}$) et tout ce qui a été dit dans ce paragraphe est encore vrai.

10) Étant données deux racines, il est souvent utile de savoir si leur somme est encore une racine. Dans le cas où l'une des deux est simple, les axiomes (SR3b) et (SR4b) fournissent, dans le cas libre, un test théorique adapté.

Pour pouvoir appliquer un tel critère à tout couple de racines, on a défini dans [Ba] une notion de coracine associée à une racine α quelconque (notée $\alpha\hat{}$ si α est imaginaire) compatible à la notion usuelle dans le cas des racines réelles.

Ceci nous a amené à considérer des cônes (dans les deux espaces en dualité de la réalisation) sur lesquels l'action du groupe de Weyl a de bonnes propriétés (cf. [Ba; §3.1 et §3.2]).

Dans le cas libre, une définition de coracines est alors possible à condition de renoncer à une détermination complète : la coracine est à choisir arbitrairement dans un cône donné.

Dans le cas non libre, la coracine est définie grâce à la méthode standard de la définition dans le revêtement suivie de la projection ([Ba; 4.3.7]).

Sans insister sur la définition générale (un peu technique) des coracines (exposée au chapitre III de [Ba]), rappelons les trois propriétés obtenues dans le cas libre et généralisées au cas quelconque qui nous seront utiles ici; c'est-à-dire les propositions 3.2.3 et 3.2.8 ainsi que le corollaire 3.2.6. de [Ba] (voir aussi 4.3.7).

[Ba; 3.2.3] Si β et δ sont deux racines positives, le signe $sgn(\langle \beta, \delta\hat{}\rangle)$ de $\langle \beta, \delta\hat{}\rangle$ (qui est un élément de $\{-, 0, +\}$) ne dépend pas du choix de la

coracine $\delta\hat{}$ de δ. De plus, si $\beta \in \Delta_+^{\mathrm{im}}$, le scalaire $\langle \beta, \delta\hat{} \rangle$ est toujours négatif ou nul.
[Ba; 3.2.6 et 1.1.10] Le signe $sgn(\langle \alpha, \beta\hat{} \rangle)$ est symétrique en α et β; autrement dit si α et β sont deux racines :

$$\langle \alpha, \beta\hat{} \rangle \ = 0 \Longleftrightarrow \langle \beta, \alpha\hat{} \rangle \ = 0\,;$$

$$\text{et } \langle \alpha, \beta\hat{} \rangle . \langle \beta, \alpha\hat{} \rangle \ \geq 0.$$

[Ba; 3.2.8] Si β et δ sont deux racines positives non $\mathbb{Q}$-proportionnelles et si $\langle \beta, \delta\hat{} \rangle$ est strictement négatif, alors $\beta + \delta$ est une racine.

Notons enfin que ce choix de la coracine est inoffensif puisqu'il est sans contradiction avec le cas symétrisable, qui nous intéresse ici, où l'on a une détermination plus univoque des racines.

Montrons qu'en effet, à une constante multiplicative $c_\alpha > 0$ près, on peut choisir pour coracine, dans le cas symétrisable, l'élément $\nu^{-1}(\alpha)$ (ce qui nous permettra d'utiliser les résultats de [Ba] sur les coracines).

Pour les racines réelles (ou plus généralement conjuguées à Π sous W), cela est clair puisque la forme bilinéaire est invariante sous l'action du groupe de Weyl et que $w.\alpha\hat{}_i$ est une coracine de $w.\alpha_i$ (au sens de [Ba; 4.3.7]).

En ce qui concerne les autres racines (toutes imaginaires), il suffit de démontrer le résultat pour les racines situées dans K_c (cf. lemme 1.1) c'est-à-dire négatives ou nulles contre tous les $\alpha\hat{}_i$. Il faut alors, d'après la définition 3.2.5 de [Ba], démontrer que $\nu^{-1}(\alpha)$ et α ont même support (cela résulte de l'injectivité et de la linéarité de ν et de l'égalité, à une constante rationnelle positive près, de $\nu^{-1}(\alpha_i)$ et $\alpha\hat{}_i$) et que les scalaires $\langle \alpha, \alpha\hat{}_i \rangle$ et $\langle \alpha_i, \nu^{-1}(\alpha) \rangle$ sont de même signe pour chaque $i \in I$ (ce qui est facile puisque $\langle \alpha, \alpha\hat{}_i \rangle = (\nu^{-1}(\alpha)), \alpha\hat{}_i)$ est, à une constante strictement positive près, égal à $(\nu^{-1}(\alpha_i), \nu^{-1}(\alpha)) = \langle \alpha_i, \nu^{-1}(\alpha) \rangle$).

11) Dans ([Ba; 5.1]), une définition de sous-système de racines plus large que celle de sous-ensemble symétrique clos a été proposée.

Si Ω est une partie non vide de Δ, on note $\Omega_+ = \Omega \cap \Delta_+$, $\Omega^{\mathrm{re}} = \Omega \cap \Delta^{\mathrm{re}}$, $\Omega^{\mathrm{im}} = \Omega \cap \Delta^{\mathrm{im}}$ etc... On dit que Ω est **un sous-système** de Δ si Ω vérifie :
(SSR1) $\alpha \in \Omega \Longrightarrow -\alpha \in \Omega$ (condition de symétrie);
(SSR2) si $\alpha \in \Omega_+$, si $\beta \in (\Omega_+ \cup \Omega^{\mathrm{re}}) \setminus \mathbb{Q}\,\alpha$, alors :
$\langle \alpha, \beta\hat{} \rangle \ < 0 \Longrightarrow \alpha + \beta \in \Omega\,;$
(SSR3) si $\alpha \in \Omega$ et $\beta \in \Omega^{\mathrm{re}}$, alors $r_\beta(\alpha) \in \Omega$.

Remarque. D'après le théorème 5.1.17 de [Ba], comme la réalisation vérifie la condition (BN), on peut trouver un système générateur de racines S_1 vérifiant (BN) qui admet Ω pour système de racines. Ce S.G.R est défini à partir des mêmes espaces en dualité, la base correspondante est choisie dans Ω_+ (et donc engendre Ω_+), la cobase est alors l'ensemble des coracines correspondantes.

§2. Sous-algèbres régulières

DÉFINITIONS. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de KMB vérifiant les hypothèses du § 1 (en particulier celles du n°9). Une sous-algèbre $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{g}$ est dite *régulière* si elle est stable sous l'action adjointe de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ (ou, ce qui est équivalent, si $\mathfrak{h}+\mathfrak{L}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$); elle est dite *birégulière* si, de plus, la restriction à $\mathfrak{L}$ de la forme bilinéaire standard est non dégénérée.

N.B.: L'hypothèse de non dégénérescence de la forme sur $\mathfrak{L}$ généralise en dimension infinie celle de semi-simplicité.

Une sous-algèbre régulière $\mathfrak{L}$ admet une décomposition sous l'action adjointe de $\mathfrak{h}$ compatible à celle de $\mathfrak{g}$. Plus précisément, on a :

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha)$ et $\mathfrak{L} = (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{L}) \oplus (\oplus_{\alpha\in\Delta}(\mathfrak{g}_\alpha\cap\mathfrak{L}))$.

Notons alors $\Psi = \{\alpha \in \Delta\,;\ \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{L} \neq \{0\}\}$ et $\mathfrak{L}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{L}$, pour $\alpha \in \Psi$.

Nous nous proposons de démontrer que si $\mathfrak{L}$ *est birégulière, alors l'ensemble* Ψ *est un sous-système de racines de* Δ (*au sens de* [Ba] *rappelé ci-dessus*).

Pour démontrer ce résultat (*en* 2.3), *nous nous plaçons* (*pour les propositions* 2.1 *et* 2.2) *dans un cadre un peu plus large s'adaptant également au problème analogue* (*traité au* §5) *dans le cas du quotient par un groupe de semi-automorphismes de diagramme.*

Supposons donnée $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie possèdant une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ agissant diagonalement sur $\mathfrak{g}$ et telle que le système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ soit associé à un S.G.R. vérifiant (BN).

Soit $\mathfrak{L}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ et $\Omega = \{\alpha \in \Delta\,;\, \mathfrak{L}\cap\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$.

DÉFINITION. Soit α appartenant à Ω. S'il existe $X_\alpha \in \mathfrak{L}_\alpha$ et $Y_\alpha \in \mathfrak{L}_{-\alpha}$ tels que $[X_\alpha, Y_\alpha]$ soit à une constante strictement positive près, une coracine de α (au sens de [Ba; 4.3.2 et 4.3.7]) modulo le centre de $\mathfrak{L}$ lorsque la racine est imaginaire, on dit que $\{X_\alpha, Y_\alpha, [X_\alpha, Y_\alpha]\}$ est *un triplet associé à la racine* α.

Proposition 2.1. *On suppose que toute racine située dans* Ω^{re} *admet dans* $\mathfrak{L}$ *un triplet associé. Si* $\beta \in \Delta^{\mathrm{re}} \cap \Omega$ *et* $\alpha \in (\Delta_+ \cap \Omega) \setminus \mathbb{Q}\beta$ *sont telles que* $\langle \alpha, \beta\check{\ } \rangle = k < 0$ *et si* $\{X_\beta, Y_\beta, [X_\beta, Y_\beta]\}$ *est un triplet associé à la racine* β*, alors* $(\operatorname{ad} X_\beta)^{-k} Z_\alpha \neq 0$*, pour tout* $Z_\alpha \in \mathfrak{L}_\alpha \setminus \{0\}$.

Démonstration. La racine β étant réelle, on peut, en modifiant si nécessaire Y_β, supposer que le triplet associé à β, toujours noté $\{X_\beta, Y_\beta, [X_\beta, Y_\beta]\}$, est un sl_2-triplet dans $\mathfrak{L}$. Par hypothèse, Δ correspond à un S.G.R qui vérifie (BN), d'après 4.3.10 de [Ba], la chaîne $(\alpha + \mathbb{Z}\beta) \cap \Delta$ est bornée et "sans trou".

Par suite, le sl_2-module engendré par Z_α sous l'action du sl_2-triplet est de dimension finie et le résultat est immédiat. □

Proposition 2.2. *On suppose que toute racine située dans* Ω *admet dans* $\mathfrak{L}$ *un triplet associé. Si* $\beta \in \Omega \cap \Delta_+^{\mathrm{im}}$ *et si* $\alpha \in (\Omega \cap \Delta_+) \setminus \mathbb{Q}\beta$ *avec* $\langle \alpha, \beta\hat{\ } \rangle < 0$*, alors* $\alpha + h\beta \in \Omega$ *pour tout* $h \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur la hauteur de β (i.e. sur $\theta(\beta)$ cf. (BN) §1 n°9). Il suffira de démontrer, à hauteur de β fixée, que :

$$(*) \qquad \text{si } \alpha \in (\Omega \cap \Delta_+) \setminus \mathbb{Q}\beta \text{ est telle que } \langle \alpha, \beta\hat{\ } \rangle < 0\,, \text{ alors } \alpha + \beta \in \Omega.$$

En effet, si $\langle \alpha, \beta\hat{\ } \rangle < 0$, alors pour tout entier p positif $\langle \alpha + p\beta, \beta\hat{\ } \rangle < 0$ et, en itérant le raisonnement, $\alpha + p\beta \in \Omega$ implique $\alpha + (p+1)\beta \in \Omega$.

Notons que si α est une racine réelle, $(*)$ résulte de la proposition 2.1 avec $\{X_\alpha, Y_\alpha, [X_\alpha, Y_\alpha]\}$ un triplet associé à la racine α (cf. [Ba; 3.2.6] rappelé au §1 n°10).

Reste à montrer (par récurrence sur la hauteur de β) l'assertion $(*)$ pour une racine positive imaginaire α. Une racine imaginaire positive δ est dite ici, de hauteur "minimale" si toute racine positive dont la hauteur est inférieure à $\theta(\delta) - 1/2$ est réelle.

Supposons donc le résultat établi pour les racines imaginaires de hauteur strictement inférieure à $\theta(\beta) - 3/4$ où β est la racine imaginaire considérée (hypothèse vide si β est racine imaginaire de hauteur "minimale").

À β fixée, on raisonne encore par récurrence sur la hauteur de la racine α.

1. Si la hauteur de α est strictement inférieure à $\theta(\beta) - 3/4$ (ce qui est impossible si β est racine imaginaire de hauteur "minimale"), le résultat

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

vient par hypothèse de récurrence (α jouant le rôle de β et β celui de α) puisqu'on a aussi $\langle \beta, \alpha\check{}\rangle < 0$ ([Ba]; 3.2.6] rappelé au § 1).

2. On suppose alors, à β fixée, que $\theta(\alpha) \geq \theta(\beta) - 3/4$ et que l'assertion $(*)$ est démontrée pour toute racine α' de hauteur inférieure à $\theta(\alpha) - 3/4$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\alpha + \beta \notin \Omega$.

(a) On note encore $\{X_\alpha, Y_\alpha, [X_\alpha, Y_\alpha]\}$ (resp. $\{X_\beta, Y_\beta, [X_\beta, Y_\beta]\}$) un triplet associé à la racine α (resp. à β).
L'hypothèse implique $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ et donc $[X_\alpha, Y_\beta] \neq 0$ (puisque $[X_\alpha, [X_\beta, Y_\beta]] \neq 0$). Comme α ne peut pas être égale à β, on a forcément $\theta(\alpha) \geq \theta(\beta) + 3/4$. Considérons alors la sous-algèbre :

- $\mathfrak{k}_\beta = \mathbb{K}X_\beta + \mathbb{K}Y_\beta + \mathbb{K}[X_\beta, Y_\beta] + \mathbb{K}[X_\alpha, Y_\alpha]$ si β est imaginaire affine (i.e. isotrope);
- $\mathfrak{k}_\beta = \mathbb{K}X_\beta + \mathbb{K}Y_\beta + \mathbb{K}[X_\beta, Y_\beta]$ si β est imaginaire non affine.

On obtient, dans chacun des cas, une algèbre de Kac-Moody-Borcherds correspondant à une réalisation de Kac, associée à la matrice réduite à un élément $\langle \beta, \beta\check{}\rangle$.
Dans les deux cas, l'algèbre dérivée correspondante est $\mathfrak{k}'_\beta = \mathbb{K}X_\beta + \mathbb{K}Y_\beta + \mathbb{K}[X_\beta, Y_\beta]$.
On note V le $\mathfrak{k}'_\beta$-module engendré par X_α.
Il est clair grâce au théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt que $V = \oplus_{n\in\mathbb{N}}(\mathfrak{g}_{\alpha-n\beta} \cap V)$, que $\mathfrak{g}_\alpha \cap V = \mathbb{K}X_\alpha$ et que pour tout entier n positif, $\mathfrak{g}_{\alpha-n\beta} \cap V$ est de dimension 0 ou 1.

(b) Montrons que β n'est pas de type affine.

Supposons au contraire $\langle \beta, \beta\check{}\rangle = 0$. On a vu que $\mathfrak{k}_\beta$ est l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds associée à la matrice réduite à un zéro ayant pour générateurs X_β, $-Y_\beta$, $[X_\beta, -Y_\beta]$ et $[X_\alpha, Y_\alpha]$ (où, modulo le centre de $\mathfrak{L}$, le crochet $[X_\beta, -Y_\beta]$ vaut $-c\beta\check{}$ avec $c > 0$).

Le module V satisfait aux conditions (i), (ii), (iii) de la proposition 9.10 de [K] et si l'on a $(\mathfrak{g}_{\alpha-n\beta} \cap V) \neq 0$, alors $\langle \alpha - n\beta, -\beta\check{}\rangle > 0$.

Ainsi, on peut appliquer le corollaire 9.10 de Kac qui permet alors d'affirmer que V est un $\mathfrak{U}(\mathbb{K}Y_\beta)$-module libre de rang 1.

Par suite, pour tout entier n positif, $(\mathfrak{g}_{\alpha-n\beta} \cap V) \neq \{0\}$.

Soit alors $w \in W$ tel que $w.\beta \in K_c$, on sait que $w(\alpha - n\beta) \in \Delta$ pour tout entier positif n, donc est dans Δ_- pour n assez grand (toujours à cause de (BN)).

Remontons alors dans un revêtement $\widetilde{\Delta}$ de Δ, toutes les racines qui induisent $w.\beta$ sont affines et sont égales ou ont des supports disjoints [Ba;

4.3.6]. Or, d'après la construction précédente, il existe des racines $\widetilde{\beta}_p$ (induisant β) et une racine $\widetilde{\alpha}$ induisant α telles que $w.\widetilde{\alpha} - \sum_{k=1}^{k=n} w.\widetilde{\beta}_k \in \widetilde{\Delta}_-$ (et $w.\widetilde{\alpha} - \sum_{k=1}^{k=p} w.\widetilde{\beta}_k \in \widetilde{\Delta}$ pour tout $0 \leq p \leq n$). Par connexité des supports des racines dans $\widetilde{\Delta}$, ceci impose à tous les $w.\widetilde{\beta}_k$ intervenant dans cette somme d'être égaux. Par suite, le support de $w.\widetilde{\alpha}$ est inclus dans celui de $w.\widetilde{\beta}$ qui est affine, $\widetilde{\alpha}$ étant supposée imaginaire, elle est nécessairement $\mathbb{Q}$-proportionnelle à $\widetilde{\beta}$; ce qui est interdit.

(c) Montrons que pour toute racine γ de $\Omega \cap \Delta_+^{\mathrm{re}}$, on a : $\langle \beta, \gamma\check{\ } \rangle \leq 0$.

D'après l'hypothèse d'existence des sl_2-triplets, il existe dans $\mathfrak{L}$ un automorphisme qui induit la réflexion par rapport à γ sur l'ensemble des racines et par suite, si $\langle \beta, \gamma\check{\ } \rangle > 0$, alors $r_\gamma(\beta)$ est une racine imaginaire positive de Ω de hauteur strictement inférieure à $\theta(\beta) - 3/4$. Par hypothèse de récurrence, $r_\gamma(\beta) + r_\gamma(\alpha)$ est dans Ω ; d'où une contradiction.

(d) Soit $h \in \mathbb{N}$, montrons que si $\alpha - h\beta \in \Delta_+$, alors $V_{\alpha - h\beta} \neq \{0\}$ (et ainsi $\alpha - h\beta \in \Omega$).

Puisque β n'est pas affine, on peut modifier le triplet qui lui est associé pour obtenir un sl_2-triplet $\{X_\beta, -Y_\beta, [X_\beta, -Y_\beta]\}$.

Si le module V est de dimension infinie, il est clair que $V_{\alpha - n\beta} \neq \{0\}$ pour tout entier n.

Si au contraire, il est de dimension finie, il existe un entier n tel que $V_{\alpha - p\beta} \neq \{0\}$ si et seulement si $p \leq n$. La théorie des sl_2-modules de dimension finie permet alors d'affirmer que :
$\langle \alpha - n\beta, [X_\beta, -Y_\beta] \rangle = -\langle \alpha, [X_\beta, -Y_\beta] \rangle < 0$ car $[X_\beta, -Y_\beta] \in -\mathbb{Q}_+ \beta\check{\ }$. Par suite, la racine $\alpha - n\beta$ est négative (d'après c) et 3.2.6 de [Ba] cf. § 1 n°10) si elle est réelle et ([Ba; 3.2.3] cf. § 1 n°10) si elle est imaginaire); d'où le résultat.

On note l le plus grand entier tel que $\alpha - l\beta$ soit une racine positive.

Remarque. On a $\langle \alpha - l\beta, \beta\check{\ } \rangle \leq 0$ d'après c) si $\alpha - l\beta$ est réelle et d'après [Ba; 3.2.3] (rappelé au § 1 n°10) si elle est imaginaire et $\theta(\beta) - 3/4 \geq \theta(\alpha - l\beta) \geq 3/4$.

(e) Démontrons que $\alpha - (l+2)\beta$ est un poids de la représentation (i.e. $V_{\alpha-(l+2)\beta} \neq \{0\}$).

Si V est de dimension infinie, le résultat est immédiat. Supposons sa dimension finie. Par symétrie des poids dans une représentation de sl_2, si $V_{\alpha-(l+2)\beta} = \{0\}$, on a alors $l \leq 2$ d'où :

- soit $l = 0$; mais alors, $\alpha - \beta$ est une racine négative, ce qui contredit notre hypothèse :
$\theta(\alpha) \geq \theta(\beta) - 3/4$;

- soit $l = 1$ et $\langle \alpha-\beta, \beta\hat{}\ \rangle = 0$. Dans ce cas, en se plaçant dans Δ, on peut ramener la racine imaginaire (non affine) β dans K_c, l'égalité $\langle \alpha-\beta, \beta\hat{}\ \rangle = 0$ implique alors $\alpha - \beta \in \Delta^{\mathrm{re}}$ (cf. [Ba; 3.1.2]) car il est clair que des supports (au sens du § 1 n°7) de ces deux racines sont liés (on obtient dans ce module une bonne décomposition de α sous la forme $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$).

Mais alors, $\langle \alpha - \beta, (\alpha - \beta)\check{}\ \rangle$ vaut 2 et $\langle \beta, (\alpha - \beta)\check{}\ \rangle$ est nul donc $\langle \alpha, (\alpha - \beta)\check{}\ \rangle = 2$. Par suite, on a $r_{\alpha-\beta}(\alpha) = -\alpha + 2\beta \in \Delta_+^{\mathrm{im}} \cap \Omega$ et $-\alpha + 2\beta - \beta$ est dans Δ_- donc la hauteur de $-\alpha + 2\beta$ est strictement inférieure à $\theta(\beta) - 3/4$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence avec $r_{\alpha-\beta}(\alpha) = -\alpha + 2\beta$ à la place de β et $r_{\alpha-\beta}(\beta) = \beta$ à la place de α. Grâce à 3.2.6 de [Ba] (cf. § 1 n°10), on a $\langle -\alpha + 2\beta, \beta\hat{}\ \rangle < 0$, d'où, $r_{\alpha-\beta}(\beta + \alpha) \in \Omega$ et il en est de même de $\alpha + \beta$, d'où la contradiction.

(f) Montrons à présent que $\langle \alpha - l\beta, \beta\hat{}\ \rangle < 0$.

D'après la remarque faite au d), il s'agit de voir que $\langle \alpha - l\beta, \beta\hat{}\ \rangle = 0$ est impossible. Les supports (de bonnes décompositions) des racines $\alpha - l\beta$ et β sont liés (puisqu'on a dans V une bonne décomposition de α sous la forme $(\alpha - l\beta) + l\beta$); d'après 3.1.2 de [Ba], cette égalité ne peut donc se produire que lorsque la racine $\alpha - l\beta$ est réelle.

Si l'on suppose $\langle \alpha - l\beta, \beta\hat{}\ \rangle = 0$, on a (toujours par symétrie des poids) $V_{\alpha-2l\beta} \neq \{0\}$. La racine $\alpha - 2l\beta$ est donc dans Ω. De plus, $-\alpha + 2l\beta \in \Delta_+$ et $-\alpha + 2l\beta - \alpha = 2(-\alpha + l\beta)$ est négative, donc $-\alpha + 2l\beta$ est de hauteur strictement inférieure à $\theta(\alpha) - 3/4$. Par hypothèse de récurrence (sur la hauteur de α à β fixée), comme $\langle -\alpha + 2l\beta, \beta\hat{}\ \rangle < 0$, on sait que $-\alpha + (2l + 1)\beta \in \Omega$. De plus, $\langle -\alpha + (2l+1)\beta, (\alpha - l\beta)\check{}\ \rangle = \langle -\alpha + l\beta, (\alpha - l\beta)\check{}\ \rangle = -2$. Par stabilité de Ω sous $r_{\alpha-l\beta}$, on a $r_{\alpha-l\beta}(-\alpha + (2l+1)\beta) = -\alpha + (2l+1)\beta + 2(\alpha - l\beta) = \alpha + \beta \in \Omega$; d'où une contradiction.

(g) Nous pouvons alors affirmer que : $V_{\alpha-(2l+1)\beta} \neq 0$.

D'après f), la racine $\alpha - l\beta$ n'est pas le milieu de la chaîne de poids de V; on obtient donc immédiatement le résultat.

(h) Tout ceci va nous permettre d'obtenir le résultat cherché : $\alpha + \beta \in \Omega$.

Montrons que $\langle -\alpha + (2l + 1)\beta, (\alpha - l\beta)\hat{}\ \rangle < 0$.

En effet, si $-\alpha + (2l + 1)\beta \in \Delta_+^{\mathrm{im}}$:
- cela est clair si $\alpha - l\beta \notin \Delta^{\mathrm{re}}$ puisque les supports de ces racines sont liés : on passe dans V du sous-espace de poids $\alpha - l\beta$ à celui de poids $\alpha - (2l + 1)\beta)$

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

en appliquant $(\mathrm{ad}Y_\beta)^{l+1}$, il existe donc de bonnes décompositions de ces racines pour lesquelles on peut écrire $\alpha - l\beta \leq \beta \leq (2l+1)\beta - \alpha$ (pour l'ordre usuel où $\alpha \leq \beta$ si $\beta - \alpha \in Q_{\mathbb{Q},+}$);
- si $\alpha - l\beta \in \Delta^{\mathrm{re}}$, un calcul direct est possible et :
$\langle -\alpha + (2l+1)\beta, (\alpha - l\beta)\check{}\,\rangle = \langle -\alpha + l\beta, (\alpha - l\beta)\check{}\,\rangle + (l+1)\langle \beta, (\alpha - l\beta)\check{}\,\rangle$ est donc inférieur à -2 d'après f) et la proposition 2.1 permet de conclure.

Enfin, si $-\alpha + (2l+1)\beta \in \Delta_+^{\mathrm{re}}$, cela résulte de l'égalité :
$\langle \alpha - l\beta, ((2l+1)\beta - \alpha)\check{}\,\rangle = \langle \alpha - (2l+1)\beta, ((2l+1)\beta - \alpha)\check{}\,\rangle + \langle (l+1)\beta, ((2l+1)\beta - \alpha)\check{}\,\rangle$ et du c).
Par suite, la racine $\alpha - l\beta$ étant de hauteur inférieure à celle de β, l'hypothèse de récurrence s'applique aux racines considérées ici, d'où $\alpha - l\beta + (2l+1)\beta - \alpha = (l+1)\beta \in \Omega$; de même $\langle (l+1)\beta, (\alpha - l\beta)\hat{}\,\rangle < 0$ implique $\alpha + \beta \in \Omega$. ∎

En revenant au cadre qui nous intéresse d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds vérifiant les hypothèses du §1, *nous pouvons à présent montrer que le système de racines* Ψ *correspondant à une sous-algèbre birégulière de* $\mathfrak{g}$ *est un sous-système de* Δ.

PROPOSITION 2.3. *Si* $\mathfrak{L}$ *une sous-algèbre birégulière de* $\mathfrak{g}$, *alors* $\Psi = \Delta(\mathfrak{L}; \mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})$ *est un sous-système de racines de* Δ *qui vérifie de plus la propriété suivante :*
pour α, β *dans* $\Psi \cap \Delta^{\mathrm{re}}$, *si* $\alpha + \beta$ *est une racine, alors elle appartient à* Ψ.

DÉFINITION. Lorsqu'il vérifie cette dernière condition, un sous-système est dit *clos réellement*.

Remarques. 1. Si $\mathfrak{L}$ est, de plus, une sous-algèbre graduée de l'algèbre $\mathfrak{g}$ (graduée par $\widetilde{\Delta}$), alors l'ensemble $\widetilde{\Psi} = \{\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta};\ \mathfrak{g}_{\widetilde{\alpha}} \cap \mathfrak{L} \neq \{0\}\}$ est un sous-système clos réellement de $\widetilde{\Delta}$ et $\Psi = \psi(\widetilde{\Psi})$.

2. Notons qu'on peut démontrer un résultat un peu plus précis en utilisant un raisonnement analogue à celui des démonstrations des propositions 2.1 et 2.2, à savoir :

si α et β sont deux racines non $\mathbb{Q}$-proportionnelles, telles que $\langle \alpha, \beta\hat{}\,\rangle < 0$, et si $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, alors $\mathrm{ad}X_\beta$ induit une injection de $\mathfrak{g}_\alpha$ dans $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ (ce qui n'est pas immédiat si α et β sont imaginaires).

Dans le cas où le corps est $\mathbb{C}$, la démonstration est très simple : soit $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned}([X_\alpha, X_\beta], \omega([X_\alpha, X_\beta])) = {}& ([\omega(X_\beta), X_\alpha], [X_\beta, \omega(X_\alpha)]) \\ & + (X_\alpha, \omega(X_\alpha))(X_\beta, \omega(X_\beta))\alpha(\nu^{-1}(\beta))\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

donc si $\alpha(\nu^{-1}(\beta)) < 0$, sachant que la forme $-(.,\omega(.))$ est hermitienne définie positive sur $\mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$, on a $[X_\alpha, X_\beta] \neq 0$; ce qui prouve que la restriction de $\mathrm{ad}X_\beta$ à $\mathfrak{g}_\alpha$ est injective.

Démonstration. Dans l'algèbre $\mathfrak{g}$, on sait que $(\mathfrak{g}_{\widetilde{\alpha}}, \mathfrak{g}_{\widetilde{\beta}}) = 0$ si $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} \neq 0$ (et donc $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$) avec la convention $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Par suite, si $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{L} \neq \{0\}$ (i.e. $\alpha \in \Psi$), alors $-\alpha \in \Psi$ puisque la restriction à $\mathfrak{L}$ de la forme est supposée non dégénérée; ce qui établit (SSR1).

Si β est une racine réelle située dans Ψ, alors $\mathfrak{L}_{\pm\beta} = \mathfrak{g}_{\pm\beta}$ donc le $\mathfrak{sl}_2$ triplet correspondant est dans $\mathfrak{L}$ et l'automorphisme de $\mathfrak{g}$: $\exp(\mathrm{ad}X_\beta)$ $\exp(\mathrm{ad}{-Y_\beta})$ $\exp(\mathrm{ad}X_\beta)$ stabilise $\mathfrak{L}$. Cet automorphisme induit, dans $\mathfrak{h}^*$, la réflexion par rapport à β; (SSR3) est ainsi bien vérifié.

Montrons à présent que le sous-système est clos réellement. Si α et β sont deux racines réelles situées dans Ψ, la dimension des espaces radiciels correspondants impose $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{L}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{L}_\beta$. Par suite, $[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta] = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}$.

D'après [K; 3,6], si $\langle\beta, \alpha\check{}\rangle \geq 0$, alors $\mathrm{ad}X_\alpha$ induit une surjection de $\mathfrak{g}_\beta$ sur $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$; ce qui implique $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}$.

Si $\langle\beta, \alpha\check{}\rangle < 0$, l'assertion résultera de (SSR2) elle-même obtenue grâce aux propositions 2.1 et 2.2 si l'on démontre l'existence dans $\mathfrak{L}$ de triplets associés aux racines de la base. Ceci s'obtient aisément à partir de la non dégénérescence de la restriction à $\mathfrak{L}$ de la forme bilinéaire et de la proposition 2.2 de [K], si l'on remarque que $\nu^{-1}(\alpha)$ est une coracine de α au sens de [Ba] à un facteur multiplicatif rationnel et strictement positif près (1.10). ∎

Remarque. En réalité, on peut montrer, grâce au lemme suivant, que Ψ vérifie une propriété un peu plus forte que (SSR2) à savoir :

si $(\alpha, \beta) \in \Psi$ est tel que $\alpha \neq \pm\beta$, alors $\langle\alpha, \beta\check{}\rangle < 0$ implique $\alpha + \beta \in \Psi$.

Lemme 2.4. *Si $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}_{h\alpha}$, pour $h \in \mathbb{Q} \setminus \{0; \pm 1\}$, alors on a :*

$$[X, Y] = 0 \text{ si et seulement si } \alpha(\nu^{-1}(\alpha)) = 0.$$

Démonstration. Le a) du corollaire 9.12 de [K] permet de démontrer l'implication directe dans tous les cas. Généralisons à présent le b) de ce corollaire pour démontrer la réciproque.

Si $\alpha(\nu^{-1}(\alpha)) = 0$, alors d'après [Ba; 3.1.1], la racine α est conjuguée sous l'action du groupe de Weyl à une racine simple α_i (avec $a_{ii} = 0$) ou bien à une racine affine δ (telle que si S_δ désigne un support de δ, alors $A(S_\delta)$ est une matrice de Kac-Moody affine).

• Si X et Y sont conjugués à des générateurs de l'algèbre, l'égalité $[X, Y] = 0$ résulte des relations de définition.

• X et Y n'ont que des composantes non nulles X_δ et Y_δ dans une même sous-algèbre $\mathfrak{g}(A(S_\delta))$, l'égalité $[X_\delta, Y_\delta] = 0$ se déduit de [K; Cor 9.12b]. En effet, si A est une matrice de Kac-Moody et α une racine isotrope (i.e. $\langle \alpha, \nu^{-1}(\alpha) \rangle = 0$), Kac montre que $K\nu^{-1}(\alpha) \oplus (\oplus_{j \neq 0} \mathfrak{g}_{j\alpha})$ est une algèbre d'Heisenberg; ce qui établit l'implication inverse.

• Enfin, dans le cas général, pour des composantes X_{δ_1} et Y_{δ_2} de X et Y situées dans deux sous-algèbres $\mathfrak{g}(A(S_{\delta_1}))$, $\mathfrak{g}(A(S_{\delta_2}))$ (S_{δ_1} et S_{δ_2} de type affine quelconque avec $\psi(\delta_1) = \delta$ et $\psi(\delta_2) = h\delta$) telles que $a_{ij} = 0$ dès que $i \in S_{\delta_1}$ et $j \in S_{\delta_2}$, l'assertion $[X_{\delta_1}, Y_{\delta_2}] = 0$ est immédiate et le reste se déduit du point précédent. ∎

Sous l'hypothèse (BN), la fonction "hauteur" des racines permet d'affirmer que le système générateur au sens de [Ba] peut être remplacé (si nécessaire) par un S.G.R normalisé ([Ba; 4.3.8]). D'après [Ba; 5.1.17], il en est alors de même de tout sous-système de Δ. Par suite, on peut déterminer une base du sous-système Ψ ainsi obtenu (cf. [Ba; 4.3.8 et 5.1.15]). Notons qu'on obtient (dans ce cas) quelques renseignements sur les multiples des racines simples imaginaires grâce au résultat suivant.

LEMME 2.5. *Soient α une racine et X, Y deux éléments de $\oplus_{h \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{g}_{h\alpha}$, alors on a :*

$$[X, Y] \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha(\nu^{-1}(\alpha)) < 0 \textit{ et } X \textit{ non colinéaire à } Y.$$

Démonstration. D'après la graduation, l'élément $[X, Y]$ est dans $\oplus_{h \geq 2} \mathfrak{g}_{h\alpha}$ donc est nul si $\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}$.

Si $(\alpha, \alpha) < 0$, d'après le corollaire 9.12 a) de [K], on sait que $\oplus_{h \geq 1} \mathfrak{g}_{h\alpha}$ est une algèbre de Lie libre. D'après [Bbki; Lie II; § 2, exercice 14], si les vecteurs X et Y ne sont pas colinéaires, ils forment une partie Lie-libre et donc $[X, Y] \neq 0$.

Si réciproquement $[X, Y] \neq 0$, il est clair que les vecteurs ne sont pas colinéaires et d'autre part, d'après le corollaire 9.12 b) de [K], la racine α ne peut être isotrope. ∎

Remarque 2.6. Ceci permet d'affirmer que l'ensemble des multiples positifs d'une racine imaginaire non isotrope situés dans le sous-système Ψ, est soit $\{\alpha\}$ (et la multiplicité de α est 1 dans $\mathfrak{L}$), soit un ensemble stable sous l'addition. Par contre, on ne peut rien dire a priori de l'ensemble des multiples des racines isotropes de la base.

§3. Sous-algèbres très régulières

Étant donnés une sous-algèbre $\mathfrak{L}$ birégulière, associée à un sous-système Ψ de Δ et un sous-système Ω de Ψ satisfaisant à certaines conditions indiquées ci-dessous, nous nous proposons de construire dans $\mathfrak{L}$ une sous-algèbre régulière $\mathfrak{k}$ qui est une algèbre de Kac-Moody-Borcherds "minimale" (cf. proposition 3.1) *admettant pour système de racines Ω et dite "très régulière".*

Supposons donc donnés une sous-algèbre $\mathfrak{L}$ birégulière, associée à un sous-système Ψ (au sens de [Ba]) et un sous-système Ω de Ψ admettant une base Φ (contenue dans Ψ_+) et satisfaisant aux deux conditions supplémentaires suivantes :

- Ω est *presque-clos* dans Ψ; c'est-à-dire que :

$$(\alpha \in \Omega_+,\ \ \beta \in \Omega_+ \setminus \mathbb{Q}\,\alpha, \quad \alpha - \beta \in \Psi) \Longrightarrow (\alpha - \beta \in \Omega).$$

- Ω muni de Φ est réduit (au sens de §1 n°7);

N.B.: Le S.G.R. initial satisfaisant à la condition (BN), un S.G.R. correspondant (comme dans [Ba]) à un sous-système vérifie cette même condition (cf. [Ba; 5.1.17]). Il est alors possible de le normaliser (cf. [Ba; 4.3.8]). Dans ce sous-système normalisé, on peut alors dans la suite se contenter des deux conditions suivantes :

- le système Ω est *presque-clos* dans Ψ;
- Ω muni de Φ est presque-réduit (au sens de §1 n°7).

Notons que ces deux hypothèses n'imposent pas à Ω muni de Φ d'être réduit puisque des multiples d'une racine imaginaire α_i s'écrivant comme de bonnes décompositions des autres racines de la base sont admises.

D'après le lemme 1.1, on sait qu'un système réduit est normalisé. Notons qu'on a aussi le résultat suivant :

Un sous-système presque-clos qui, de plus, est réduit réellement (i.e. tel que Δ^{re} est réduit ou encore presque-réduit) est clos réellement.

Démonstration. Soit Ω un sous-système presque-clos d'un système de racines Δ, notons Φ une base de Ω située dans Δ_+ et α et β deux racines réelles non proportionnelles de Ω telles que $\alpha+\beta \in \Delta$; montrons que $\alpha+\beta \in$

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

Ω. On note W_Ω le sous-groupe de W engendré par les réflexions par rapport aux racines situées dans Ω.

L'axiome (SSR1) nous permet de supposer l'une des deux racines (disons α) positive.

• D'après (SSR2), si $\langle \alpha, \beta\hat{}\rangle < 0$ (ou, ce qui est équivalent si $\langle \beta, \alpha\hat{}\rangle < 0$), on a bien $\alpha + \beta \in \Omega$.

• Si $\langle \alpha, \beta\hat{}\rangle = 0$, alors $\alpha + \beta \in \Delta$ implique $\alpha - \beta \in \Delta$ ((SR3b) dans Δ), l'hypothèse presque-clos impose alors $\alpha - \beta \in \Omega$ (ou $\alpha + \beta \in \Omega$ suivant le signe de β) et, par (SSR3), on a $\alpha + \beta \in \Omega$.

• Reste le cas $\langle \alpha, \beta\hat{}\rangle > 0$. La racine α étant réelle, il existe $w \in W_\Omega$ tel que $w.\alpha \in \Phi$. Si $w.\beta \in \Omega_-$, alors $w.\alpha - (-w.\beta) \in \Omega$ et donc $\alpha + \beta \in \Omega$ (par stabilité de Ω sous W_Ω).

Sinon, comme $\langle \alpha, \beta\hat{}\rangle > 0$, on a $\mu = w.\beta - w.\alpha \in \Omega$ et μ est une racine positive. En effet, si $\mu \in \Omega_-$, alors $w.\alpha = w.\beta + (-\mu)$; ce qui contredit (4.2.5) de [Ba] puisque $w.\alpha$ est une racine simple. De même $r_{w.\alpha}(w.\beta)$ est une racine positive de Ω et $r_{w.\alpha}(w.\beta) - (-r_{w.\alpha}(w.\alpha))$ est dans Δ donc dans Ω (qui est presque-clos), ainsi $\alpha + \beta \in \Omega$ (par stabilité de Ω sous W_Ω). $\square$

Construction de la sous-algèbre très régulière.

Pour chaque racine α de la base Φ de Ω, choisissons un élément X_α de $\mathfrak{L}_\alpha \setminus \{0\}$.

Par hypothèse,la restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{L}$ est non dégénérée, il existe donc un élément Y_α de $\mathfrak{L}_{-\alpha}$ tel que $(X_\alpha, Y_\alpha) = c_\alpha$ (où $c_\alpha \nu^{-1}(\alpha) = \alpha\hat{}$); ainsi $[X_\alpha, Y_\alpha] = \alpha\hat{} \neq 0$. Dans $\mathfrak{L}$, considérons la $\mathbb{K}$-sous-algèbre $\mathfrak{k}$ engendrée par $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}$ et ces vecteurs X_α, Y_α pour chaque $\alpha \in \Phi$.

Montrons que $\mathfrak{k}$, ainsi construite, est l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds associée à la matrice $B = \Big(c_\beta(\alpha, \nu^{-1}(\beta))\Big)_{(\alpha,\beta)\in\Phi^2}$ pour la réalisation $((\mathfrak{h} \cap \mathfrak{L})\,; (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{L})^*\,; \Phi\,; \Phi\hat{})$ et que cette algèbre admet Ω pour système de racines.

La matrice ainsi obtenue est une matrice de Borcherds générale symétrisable (cf. [Ba; 5.1.16 et fin du § 5.1] ou [Bo]). En effet, il existe une matrice diagonale D (dont les coefficients sont $d_{\alpha,\beta} = c_\beta \delta_{\alpha,\beta}$) et une matrice symétrique $S = \Big(\alpha(\nu^{-1}(\beta))\Big)$ telles que $B = DS$.

Il est clair que les relations :

$$\begin{cases} [h, h'\,] = 0, & \forall (h, h') \in \mathfrak{h}^2; \\ [h, X_\alpha\,] = \langle \alpha, h\rangle X_\alpha, & \forall h \in \mathfrak{h}, \forall \alpha \in \Phi; \\ [h, Y_\alpha\,] = -\langle \alpha, h\rangle Y_\alpha, & \forall h \in \mathfrak{h}, \forall \alpha \in \Phi; \\ [X_\alpha, Y_\beta\,] = \delta_{\alpha,\beta}\alpha\hat{}, & \forall (\alpha, \beta) \in \Phi^2; \end{cases}$$

sont satisfaites puisqu'elles résultent de l'hypothèse $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et du choix de $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$; pour la dernière, il faut examiner le cas de deux racines α et β distinctes de Φ^2 pour lesquelles $[X_\alpha, Y_\beta]$ est supposé non nul en raisonnant sur les décompositions de $X_\alpha = \sum X_{\widetilde{\alpha}}$ et $Y_\beta = \sum Y_{\widetilde{\beta}}$ suivant le système $\widetilde{\Delta}$:

il existe alors $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ tels que $[X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\beta}}] \neq 0$ donc $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}$ est une racine que l'on peut (quitte à échanger α et β) supposer positive et dont le support est lié à celui de $\widetilde{\beta}$ (par unicité des décompositions dans le revêtement et l'égalité $\widetilde{\alpha} = (\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}) + \widetilde{\beta}$). Le système Ω étant supposé réduit, il est normalisé et d'après 1.2, les racines $\alpha - \beta$ et β sont imaginaires à supports dans Ω non liés (quelles que soient les bonnes décompositions considérées), d'où une contradiction.

Par suite, $\mathfrak{k}$ est un quotient de l'algèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}(B)$ associée à la réalisation précédente (cf. [K] ou [Ba]) par un idéal intersectant $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k})$ trivialement. D'autre part, on sait qu'il existe dans $\widetilde{\mathfrak{g}}(B)$ un plus grand idéal $\mathfrak{r}$ d'intersection avec $\mathfrak{h}$ réduite à $\{0\}$ et que l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds est exactement le quotient de $\widetilde{\mathfrak{g}}(B)$ par cet idéal.

La matrice B étant symétrisable, il suffit (cf. [Bo] et [K; 11.13]) de démontrer que les relations suivantes :

$$\begin{cases} (\mathrm{ad}\ X_\alpha)^{(-\langle \beta, \check{\alpha} \rangle + 1)} X_\beta = 0, & \forall (\alpha, \beta) \in \Phi_{\mathrm{re}} \times \Phi; \\ (\mathrm{ad}\ Y_\alpha)^{(-\langle \beta, \check{\alpha} \rangle + 1)} Y_\beta = 0, & \forall (\alpha, \beta) \in \Phi_{\mathrm{re}} \times \Phi; \\ [X_\alpha, X_\beta\,] = 0, & \forall (\alpha, \beta) \in \Phi^2 \ \text{ tels que } \langle \beta, \hat{\alpha} \rangle = 0; \\ [Y_\alpha, Y_\beta\,] = 0, & \forall (\alpha, \beta) \in \Phi^2 \ \text{ tels que } \langle \beta, \hat{\alpha} \rangle = 0; \end{cases}$$

sont vérifiée dans $\mathfrak{k}$.

Les deux premières relations et les dernières lorsque α ou β est réelle résultent très facilement des relations connues dans l'algèbre $\mathfrak{g}$.

Montrons alors les deux dernières relations lorsque α et β sont imaginaires. Dans ce cas, l'égalité $\langle \beta, \hat{\alpha} \rangle = 0$ signifie que (en ramenant α dans K_c) les supports de α et β sont disjoints ou affines et égaux (au sens où c'est le cas pour toutes les racines se projetant sur α et β considérées dans le revêtement; cf. [Ba; §3.1]).

Les racines α et β ne pouvant être $\mathbb{Q}$-proportionnelles (puisque situées dans Φ) le second cas est exclus; dans le premier cas (i.e. lorsque les supports sont disjoints) on a évidemment le résultat puisque $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = [\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{-\beta}] = \{0\}$.

Ceci permet d'établir l'existence de la sous-algèbre très régulière cherchée.

PROPOSITION 3.1. *Soit $\mathfrak{L}$ une sous-algèbre birégulière de $\mathfrak{g}$. Si Ω est un sous-système du système de racines Ψ de $\mathfrak{L}$, presque-clos dans Ψ et réduit, il existe dans $\mathfrak{L}$ une sous-algèbre régulière $\mathfrak{k}$ admettant Ω pour système de racines et qui est une algèbre de Kac-Moody-Borcherds.*

Cette sous-algèbre $\mathfrak{k}$ est minimale au sens où toute sous-algèbre $\mathfrak{k}'$ de $\mathfrak{k}$ contenant $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}$ et admettant Ω pour système de racines est égale à $\mathfrak{k}$.

DÉFINITION. Une telle sous-algèbre $\mathfrak{k}$ est dite *très régulière.*

Démonstration. L'assertion concernant le système de racines découle de [Ba; 1.2.13 et 2.2] puisque Φ est une base de Ω. La minimalité est claire puisque par construction, pour $\alpha \in \Phi$, le sous-espace $\mathfrak{k}_\alpha$ est de dimension un. □

Remarques. 1. Notons que la restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{k}$ est non dégénérée ($\mathfrak{k}$ est donc birégulière) :

en effet, en tant qu'algèbre de Kac-Moody-Borcherds associée à une matrice symétrisable, elle possède une forme bilinéaire invariante "unique" et non dégénérée puisque d'après [K, exercice 2.2], l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds $\mathfrak{k}$ associée à une matrice symétrisable possède une unique forme bilinéaire invariante de restriction donnée à :
$\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}} = \{H \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k})\,;\, \alpha(H) = 0 \ (\forall\, \alpha \in \Phi)\}$.

Si la forme sur la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}$ est non dégénérée, alors il en est de même sur $\mathfrak{k}$.

Il est clair alors que la restriction de la forme initiale coïncide bien avec celle-ci; comme elle est non dégénérée sur $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}$, elle l'est aussi sur $\mathfrak{k}$.

2. La construction de la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ admettant Ω pour système de racines utilise en fait la propriété (SGRN) du système Ω et pas vraiment le fait que celui-ci soit réduit ni presque-réduit; or, sous l'hypothèse (BN), il est toujours possible de normaliser le système Ω (cf. [Ba; 5.1.18]).

Dans le cas d'un sous-système Ω presque-clos, pour lequel Ω^{re} est réduit, on pourra encore construire une sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de système de racines Ω si la condition suivante est vérifiée :

si $\alpha \in \Phi$ est imaginaire non affine, alors $\mathbb{Q}\,\alpha \cap \Omega$ est réduit à $\{\alpha\}$ ou est stable par addition.

Pour cela, il faut d'abord normaliser Ω ([Ba; 5.1.18]) puis choisir un générateur dans chaque $\mathfrak{L}_{h\alpha}$ pour $h \in N_{\alpha,\mathrm{ind}}$ (ensemble des éléments de N_α qui ne s'écrivent pas comme somme d'éléments de N_α) si α est imaginaire non affine et pour tout $h \in N_\alpha$ si elle est affine.

3. Dans cette nouvelle construction, l'hypothèse $(.,.)$ non dégénérée est cette fois très importante pour déterminer les triplets générateurs associés aux racines de la base.

Proposition 3.2. *Une sous-algèbre birégulière $\mathfrak{L}$ est elle-même très régulière si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) *le système de racines $\Omega = \Psi$ de $\mathfrak{L}$ est réduit;*

2) *pour toute racine α de la base Φ de Ω, l'espace radiciel $\mathfrak{L}_\alpha$ est de dimension* 1;

3) *pour toute racine α positive de Ω, si $X \in \mathfrak{L}_\alpha \setminus \{0\}$, il existe une racine de la base β et $Y \in \mathfrak{L}_{-\beta}$ tels que $[X, Y] \neq 0$.*

Remarque. Comme précédemment l'hypothèse de la remarque 2) de 3.1 sur Ω, est suffisante à condition de supposer en 2) que pour tout $\alpha \in \Phi$ et pour tout $q \in N_{\alpha,\mathrm{ind}}$ (resp. $q \in N_\alpha$) si α non affine (resp. α affine) $\mathfrak{L}_{q\alpha}$ est de dimension un.

Démonstration. D'après ce qui précède, ces conditions sont nécessaires. Il s'agit de montrer que réciproquement sous les trois conditions de la proposition, l'algèbre $\mathfrak{L}$ est exactement la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ engendrée comme précédemment par les triplets associés aux racines de la base.

L'hypothèse "Ω réduit" permet d'affirmer que le système de racines qui correspond à $\mathfrak{k}$ est bien Ω. En particulier, $\mathfrak{k}_\alpha = \{0\} \Longrightarrow \mathfrak{L}_\alpha = \{0\}$.

On sait que Ω admet Φ pour base de racines, on considérera donc, dans la suite de la démonstration, la décomposition des racines par rapport à cette base.

Grâce à l'hypothèse de non dégénérescence de la forme bilinéaire, il suffit de démontrer que si $X \in \mathfrak{L}_+ = \sum_{\alpha\in\Omega_+} \mathfrak{L}_\alpha$, alors X est une combinaison linéaire de crochets itérés des X_α (générateurs de $\mathfrak{L}_\alpha$) pour $\alpha \in \Phi$.

On peut se contenter d'établir ce résultat pour $X \in \mathfrak{L}_\beta$ où β est une racine positive de Ω.

Si $\beta \in \Phi$, cela résulte de l'hypothèse sur la dimension de $\mathfrak{L}_\beta$.

Si $\beta \in \Omega \setminus \Phi$ et si $X \in \mathfrak{L}_\beta \setminus \{0\}$, d'après l'hypothèse 3), il existe des éléments $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ dans les $\mathfrak{L}_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Phi$ tels que $[.[[X, Y_1], Y_2], \dots, Y_n] \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ (β est alors la somme des racines α précitées). Par suite, le scalaire $([.[[X, Y_1], Y_2], \dots, Y_{n-1}], Y_n)$ n'est pas nul et par invariance de la forme bilinéaire on obtient $(X, [[Y_1, [Y_2, \dots [Y_{n-1}, Y_n].]]]) \neq 0$; l'élément X n'est pas orthogonal à la sous-algèbre engendrée par les Y_α.

On obtient ainsi $\mathfrak{k}_{-\beta}^{\perp} \cap \mathfrak{L}_{\beta} = \{0\}$, ce qui, toujours grâce à la non dégénérescence de la forme bilinéaire, permet d'affirmer $\mathfrak{k}_{-\beta} = \mathfrak{L}_{-\beta}$, et bien sûr le résultat analogue pour $\mathfrak{L}_{\beta}$. □

§4. Semi-automorphismes et semi-automorphismes de diagramme

A. Semi-automorphismes et action étoile

Soit k un sous-corps de $\mathbb{K}$.

On considère une $\mathbb{K}$-algèbre de Kac-Moody-Borcherds $\mathfrak{g}$ associée à une matrice A indexée par un ensemble $\mathfrak{I}$ et une réalisation vérifiant les hypothèses du n°9 au §1. On suppose toujours A symétrisable. Comme au n°6 au §1, Δ_1 désigne le système de racines correspondant à l'action adjointe de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g}$ et on note encore $\Pi_1 = \{\alpha_i \,/\, i \in \mathfrak{I}\}$ et $\Pi_{\hat{1}} = \{\alpha_{\hat{i}} \,/\, i \in \mathfrak{I}\}$

Définitions. Un *k-semi-automorphisme de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (resp. *de* $\mathfrak{h}$) ϕ est un k-automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui stabilise $\mathfrak{h}$ (resp. de $\mathfrak{h}$), auquel est associé $\sigma_\phi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}, k)$ (unique et souvent noté encore ϕ) tel que :

$$\phi(\lambda u) = \sigma_\phi(\lambda)\phi(u) \text{ pour tout } u \in \mathfrak{g} \text{ et tout scalaire } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Si ϕ est un tel $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$-semi-automorphisme, on définit l'action de ϕ sur $\mathfrak{h}^*$ par :

$\langle \phi(\alpha), u \rangle = \sigma_\phi(\langle \alpha, \phi^{-1}(u) \rangle)$.

Un *k-semi-automorphisme de* $(\mathfrak{h}, \Delta)$ est un k- semi-automorphisme de $\mathfrak{h}$ dont l'action sur $\mathfrak{h}^*$ stabilise Δ. La restriction à $\mathfrak{h}$ d'un k-semi-automorphisme de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est un k-semi-automorphisme de $(\mathfrak{h}, \Delta)$.

Le composé de deux k-semi-automorphismes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (resp. $\mathfrak{h}$, resp. $(\mathfrak{h}, \Delta)$) est un k-semi-automorphisme de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (resp. $\mathfrak{h}$, resp. $(\mathfrak{h}, \Delta)$); les applications σ_ϕ correspondantes se composent.

Un groupe Γ de k-semi-automorphismes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (resp. $\mathfrak{h}$, resp. $(\mathfrak{h}, \Delta)$) est dit *compatible à la réalisation* si :

- tout élément de Γ stabilise $\pm W.\Pi_1$;

- pour tout $\phi \in \Gamma$ et tout $i \in \mathfrak{I}$, si $\phi(\alpha_i) = \varepsilon w.\alpha_k$ (où $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, $w \in W$ et $k \in \mathfrak{I}$), alors $\phi(\alpha_{\hat{i}}) = \varepsilon w.\alpha_{\hat{k}}$

- il existe des coefficients rationnels strictement positifs ε_i (pour $i \in \mathfrak{I}$) pour lesquels la matrice $B = (b_{ij})_{(i,j) \in \mathfrak{I}^2}$ avec $b_{ij} = \varepsilon_i a_{ij}$ est symétrique et qui de plus sont tels que :

pour tout $\phi \in \Gamma$ et tout $i \in \mathfrak{I}$, si $\phi(\alpha_i)$ est égal à $\varepsilon w.\alpha_k$ (où $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, $w \in W$ et $k \in \mathfrak{I}$), alors $\varepsilon_i = \varepsilon_k$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

Remarques. 1. Cette notion de compatibilité à la réalisation est introduite de manière à englober en particulier le cas des semi-automorphismes de diagramme (cf. B) et l'action du groupe de Weyl. Elle assure l'existence d'une forme bilinéaire symétrique invariante sur une partie substantielle de $\mathfrak{g}$ (cf. lemme 4.1).

2. Notons que la notion de compatibilité à la réalisation n'est pas trop restrictive en ce qui concerne un semi-automorphisme ϕ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

On peut en effet démontrer que dans une algèbre de Kac-Moody-Borcherds $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A, R)$ où A est à coefficients entiers, et telle que :

- si $a_{ii} < 0$, alors il existe $j \in \mathfrak{I} \setminus \{i\}$ tel que $a_{ij} \neq 0$,
- $A(\mathfrak{I}_{\mathrm{re}})$ de rang fini,

si Γ est un groupe fini de k-semi-automorphismes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, alors il existe une matrice B (qui se déduit assez facilement de A) et une réalisation R' de B telles que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(B, R')$ et pour lesquelles Γ est compatible à la réalisation.

Dans la suite de ce paragraphe A, on considère un groupe fini Γ de k-semi-automorphismes compatible à la réalisation de $(\mathfrak{h}, \Delta)$ (ou parfois de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$). Les coefficients ε_i pour $i \in \mathfrak{I}$ sont supposés choisis comme dans la définition de la compatibilité.

Le sous-groupe image dans $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}; k)$ est fini, il correspond donc à une extension de corps de dimension finie $[\mathbb{K}, E]$. Les semi-automorphismes de Γ sont en fait E-linéaires et on va donc pouvoir supposer dans ce qui précède que $k = E$.

L'application de Γ dans $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}; k)$ qui à ϕ associe σ_ϕ admet un noyau que nous noterons Γ^0; il est formé des automorphismes $\mathbb{K}$-linéaires de Γ.

Si $\Gamma^0 \neq \Gamma$ (i.e. $\mathbb{K} \neq k$), on suppose de plus vérifiée l'hypothèse :

(C) les relations à coefficients dans $\mathbb{K}$ entre les éléments de Π_1 sont engendrées par les relations à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Cela signifie que, pour toute famille finie P de Π_1, le $\mathbb{Q}$-sous-espace $< P >_{\mathbb{Q}}$ et le $\mathbb{K}$-sous-espace $< P >_{\mathbb{K}}$ engendrés par P ont même dimension par rapport à $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}$ respectivement, c'est-à-dire $< P >_{\mathbb{K}} = < P >_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}$.

Le $\mathbb{K}$-sous-espace $\mathfrak{c} = \{H \in \mathfrak{h}\,;\, \alpha_i(H) = 0 \ (\forall i \in I)\}$ est stable sous l'action de Γ. Dans $\mathfrak{c}$, choisissons un supplémentaire $\mathfrak{c}'$ stable sous Γ de $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{c} = (\sum_{i \in I} \mathbb{K} \alpha\,\hat{}_i) \cap \mathfrak{c}$ (la démonstration classique d'existence dans le cas de $\Gamma = \Gamma^0$ est encore valable ici).

Nous pourrons donc considérer l'action des éléments ϕ de Γ sur l'espace quotient $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}'$ (et sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}'$ lorsque Γ est un groupe de k-semi-automorphismes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$) ainsi que sur le sous-espace $(\mathfrak{c}')^\perp$ de $\mathfrak{h}^*$ qui contient les racines et s'identifie au dual de $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}'$.

Si X est une partie de $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{h}$ (ou de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{g}$ si Γ est un groupe de k-semi-automorphismes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$), alors X^Γ (resp. X^{Γ^0}) désigne l'ensemble des points fixes de X sous l'action de Γ (resp. de Γ^0).

En fait, pour simplifier les énoncés qui suivront, nous supposerons à partir de 4.2 *que* $\mathfrak{c}' = \{0\}$.

LEMME 4.1. *Il existe un supplémentaire* $\mathfrak{h}''$ *stable sous* Γ *de* $\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{c}' = \mathfrak{h}' + \mathfrak{c}$ *dans* $\mathfrak{h}$ *et une forme bilinéaire invariante non dégénérée sur* $\mathfrak{g}$ *tels que la restriction de cette forme à* $\mathfrak{h}_1 := \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}''$ *soit non dégénérée et invariante sous l'action de* Γ *au sens suivant :*

$(\gamma(h), \gamma(h')) = \sigma_\gamma((h, h'))$ *pour tout* $(h, h') \in \mathfrak{h}_1^2$.

Si Γ *est un groupe de* k*-semi-automorphismes* (*compatible à la réalisation*) *de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, *la forme est invariante sous* Γ *sur* $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}'$.

Dans la suite, le supplémentaire $\mathfrak{h}''$ et la forme bilinéaire seront supposés choisis comme dans la démonstration de ce lemme.

Remarques. 1. Ce choix permet d'affirmer que les espaces $\mathfrak{c}'$ et $\mathfrak{h}_1$ sont orthogonaux et que si l'on note $\mathfrak{h}''_k := \{h \in \mathfrak{h}''\,;\, \alpha_i(h) \in k\, (\forall i \in I)\}$, alors $\mathfrak{h}'' = \mathfrak{h}''_k \otimes_k \mathbb{K}$ (voir la démonstration de 4.1).

Notons aussi $\mathfrak{h}'_k$ le k-sous-espace vectoriel engendré par $\Pi\check{}$.

2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est somme directe de l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds $\mathfrak{g}_1$ définie par $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus (\oplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha)$ et de l'algèbre commutative $\mathfrak{c}'$. Ces deux sous-algèbres sont stables sous l'action de Γ et orthogonales pour la forme bilinéaire.

3. L'invariance de la forme bilinéaire restreinte à $\mathfrak{h}_1$ sous Γ montre que l'application ν restreinte à $(\mathfrak{c}')^\perp \approx \mathfrak{h}_1^*$ qui est à valeurs dans $\mathfrak{h}_1$ est Γ-équivariante.

4. Notons que nous ne pouvons en général espérer l'invariance sous Γ de la forme bilinéraire sur l'algèbre $\mathfrak{g}$ comme le montre l'exemple suivant.

Supposons $k = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\Gamma^0 = \{\pm 1, \pm i\}$ et Γ le produit semi-direct de Γ^0 et $\mathrm{Gal}(\mathbb{C};\mathbb{R})$ agissant de manière évidente sur $(\mathfrak{c}')^\perp \approx \mathbb{C}$. Il est impossible de trouver une action $\mathbb{C}$-linéaire de Γ sur $\mathbb{C}$ qui coïncide avec la précédente sur Γ^0 puisque $GL_1(\mathbb{C})$ est commutatif.

Démonstration. Soit $\mathfrak{h}''$ un supplémentaire stable sous Γ de $\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{c}'$ dans $\mathfrak{h}$. Quitte à modifier un peu $\mathfrak{h}''$, on peut supposer que si $\mathfrak{h}''_k := \{h \in \mathfrak{h}''\,;\, \alpha_i(h) \in k\,(\forall i \in I)\}$, alors $\mathfrak{h}'' = \mathfrak{h}''_k \otimes \mathbb{K}$. En effet, soit Π" une famille extraite de Π qui forme une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $< \Pi >$ engendré par Π. D'après les hypothèses, c'est aussi une base de $\mathfrak{h}'_k$ le k-espace vectoriel engendré par Π et tout élément de Π s'écrit comme combinaison à coefficients dans k des vecteurs de cette base. Soit $\mathfrak{k}$ un supplémentaire stable sous Γ de $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}'$. Le sous-espace $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}''$ s'identifie au dual de $< \Pi >$. Alors, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{k}$ est caractérisé à l'intérieur de $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}''$ par les équations dans $< \Pi >$ vérifiées par $\mathfrak{h}'$. Mais comme $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ pour tout (i, j), celles-ci se ramènent à des équations dans $< \Pi >_{\mathbb{Q}}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par Π (ou Δ). Notons alors $\mathfrak{k}^{\perp}_{\mathbb{Q}}$ ce $\mathbb{Q}$-espace vectoriel d'équations de $\mathfrak{k}$, choisissons un supplémentaire V stable par Γ de $\mathfrak{k}^{\perp}_{\mathbb{Q}}$ dans $< \Pi >_{\mathbb{Q}}$ et remplaçons $\mathfrak{h}''$ par le $\mathbb{K}$-sous espace de $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}''$ admettant pour équations les éléments de V. Ce nouvel espace $\mathfrak{h}''$ a encore toutes les propriétés du précédent et de plus vérifie :

$$\{H \in \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}''\,;\, \alpha_i(H) \in k\,(\forall i \in I)\} \otimes \mathbb{K} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}'' \text{ et donc :}$$

$$\{H \in \mathfrak{h}''\,;\, \alpha_i(H) \in k\,(\forall i \in I)\} \otimes \mathbb{K} = \mathfrak{h}''.$$

Nous définissons alors la forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c}'$ de la manière suivante :
- pour tout $i \in \mathfrak{I}$ et pour tout $h \in \mathfrak{h}$, posons $(\alpha\,\hat{i}, h) = \langle \alpha_i, h \rangle \varepsilon_i$;
- pour tous $h, h' \in \mathfrak{h}''$, posons $(h, h') = 0$;
- pour tous $h \in \mathfrak{h}''$ et $c \in \mathfrak{c}'$, posons $(h, c) = 0$;
- sur $\mathfrak{c}'$ la forme est supposée égale à une forme bilinéaire symétrique non dégénérée choisie de manière quelconque.

Par hypothèse, pour tout $i \in \mathfrak{I}$, il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, $w \in W$ et $k \in \mathfrak{I}$ tels que $\gamma(\alpha_i) = \varepsilon w.\alpha_k$ et alors $\gamma(\alpha\,\hat{i}) = \varepsilon w.\alpha\,\hat{k}$; nous avons donc :

- pour tout $h \in \mathfrak{h}'_k \oplus \mathfrak{h}''_k$ et tout $\gamma \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}(\gamma(\alpha\,\hat{i}), \gamma(h)) = (\varepsilon w.\alpha\,\hat{k}, \gamma(h)) &= \varepsilon(\alpha\,\hat{k}, w^{-1}\gamma(h)) \\ &= \varepsilon\langle \alpha_k, w^{-1}\gamma(h)\rangle \varepsilon_k = \langle \varepsilon w.\alpha_k, \gamma(h)\rangle \varepsilon_k \\ &= \langle \gamma(\alpha_i), \gamma(h)\rangle \varepsilon_i = \gamma((\alpha\,\hat{i}, h))\end{aligned}$$

d'après le choix des coefficients ε_j et puisque $\langle \alpha_i, h \rangle \in k$.
En prolongeant par $\mathbb{K}$-linéarité, nous avons plus généralement :

- pour tout $H \in \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}''$ et tout $\gamma \in \Gamma$:

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

$(\gamma(\alpha\,\hat{i}), \gamma(H)) = \gamma((\alpha\,\hat{i}, H))$ (il suffit de le vérifier pour $H = h \otimes d$ dans $\mathfrak{h}''_k \otimes \mathbb{K}$ ou dans $\mathfrak{h}'_k \otimes \mathbb{K}$);

- pour tout $(H, H') \in \mathfrak{h}''$, $(\gamma(H), \gamma(H')) = 0 = \gamma((H, H'))$.

Nous obtenons bien ainsi une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{h}$ qui induit sur $\mathfrak{h}_1$ une forme bilinéaire non dégénérée invariante sous Γ. Si de plus Γ est un groupe de k-semi-automorphismes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on peut (par la méthode usuelle [K; 2.1]) la prolonger en une forme sur $\mathfrak{g}$ invariante sous l'action du groupe Γ sur $\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}'' \oplus (\oplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha)$ (qu'on identifie aussi à $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}'$). □

Ainsi $\mathfrak{h}^\Gamma$ (comme $\mathfrak{g}^\Gamma$ si Γ est un groupe de k-semi-automorphismes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$) est un k-espace vectoriel et de plus $\mathfrak{h}^\Gamma \otimes \mathbb{K} = \mathfrak{h}^{\Gamma^0}$ car l'action de Γ sur $\mathfrak{h}^{\Gamma^0}$ est une action du groupe de Galois de l'extension $[\mathbb{K}, k]$.

Il est clair que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{c}')^{\Gamma^0}$ est orthogonal aux autres sous-représentations de Γ^0 dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}'$ et en particulier $(.,.)$ est non dégénérée sur $(\mathfrak{g}/\mathfrak{c}')^{\Gamma^0}$ ainsi que sur $(\mathfrak{h}/\mathfrak{c}')^{\Gamma^0}$. L'application ν permet d'identifier $\mathfrak{h}_1^{\Gamma^0}$ à la partie $(\mathfrak{c}'^{\perp})^{\Gamma^0}$ de $\mathfrak{h}^*$ qui est aussi son dual.

Définissons alors **"l'action étoile"** de Γ.

Si $\phi \in \Gamma$, on note ϕ^* l'automorphisme $\mathbb{K}$-linéaire de $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}'$ qui prolonge l'action de ϕ restreinte à $\mathfrak{h}''_k \oplus \mathfrak{h}'_k$. Cette action étoile $\mathbb{K}$-linéaire est également définie sur $(\mathfrak{c}')^\perp \subset \mathfrak{h}^*$, grâce à la dualité non dégénérée. Les deux actions précitées de Γ coïncident sur Δ et $\Delta\hat{}$, leurs restrictions à Γ^0 coïncident sur $\mathfrak{h}_1$ et $(\mathfrak{c}')^\perp$.

Enfin, comme annoncé, nous supposons dorénavant que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$ autrement dit que $\mathfrak{c}' = \{0\}$.

Remarque. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nous pouvons à présent, grâce à l'existence de cette forme bilinéaire, compléter la définition de la semi-involution de Cartan standard ω introduite au n°6 du § 1. Ici, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}$" et ω est d'ores et déjà connue sur $\mathfrak{h}'$ donc sur $\mathfrak{h}'_k$. Nous la définissons alors par k-dualité sur $\mathfrak{h}''_k$ et la prolongeons sur $\mathfrak{h}''$ en tant que semi-automorphisme.

Notons enfin $\mathfrak{t}$ l'ensemble des points fixes de $\mathfrak{h}$ sous les deux actions de Γ (i.e. sous Γ et l'action étoile de Γ); c'est un k-sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}^\Gamma$; il est égal à $\mathfrak{h}^\Gamma$ si $\Gamma = \Gamma^0$. La $\mathbb{K}$-sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{t}$ est notée $\mathfrak{t}_\mathbb{K}$ (c'est aussi $\mathfrak{h}^{\Gamma^*}$). Comme les deux actions de Γ coïncident sur Δ, les restrictions à $\mathfrak{t}$ des racines sont à valeurs dans k.

Lemme 4.2. *La restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{t}$ est à valeurs dans k et est non dégénérée. De plus, si $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ (par exemple pour des racines) :*

$$\sum_{\Gamma} \gamma^* \alpha = \sum_{\Gamma} \gamma^* \beta \Longleftrightarrow \alpha_{|\mathfrak{t}} = \beta_{|\mathfrak{t}}.$$

Remarque. Dans le cas (que nous avons écarté ici) où $\mathfrak{c}' \neq \{0\}$, ce résultat n'est vrai que pour les éléments de $(\mathfrak{c}')^{\perp} \subset \mathfrak{h}^*$.

Démonstration. La restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme bilinéaire étant non dégénérée, la première assertion résulte de l'invariance de celle-ci par rapport aux deux actions de Γ sur $\mathfrak{h}$.

En ce qui concerne l'équivalence, pour $h \in \mathfrak{h}$, on a $\langle \sum_{\Gamma} \gamma^* \alpha - \sum_{\Gamma} \gamma^* \beta, h \rangle = \langle \alpha - \beta, \sum_{\Gamma} \gamma^* h \rangle$, donc par non dégénérescence de la forme bilinéaire $\sum_{\Gamma} \gamma^* \alpha = \sum_{\Gamma} \gamma^* \beta$ si et seulement si α et β ont même restriction à $\mathfrak{h}^{\Gamma^*}$ ou aussi à $\mathfrak{t}$ (puisque le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{h}^{\Gamma^*}$ est engendré par $\mathfrak{t}$). □

B. Le cas des semi-automorphismes de diagramme

Définition. Un *semi-automorphisme de diagramme ϕ de $\mathfrak{g}$* (resp. $\mathfrak{h}$) est un k-semi-automorphisme de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (resp. $(\mathfrak{h}, \Delta)$),

- pour lequel il existe une bijection τ de $\mathfrak{I}$ (unique et souvent notée encore ϕ) telle que :

$\forall i \in \mathfrak{I}, \quad \phi(e_i) = c_i e_{\tau(i)}\,,\ \phi(f_i) = c_i^{-1} f_{\tau(i)}$, où $c_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et donc $\phi(\alpha\,\hat{i}) = \alpha\,\hat{\tau(i)}$ (resp. seulement $\phi(\alpha\,\hat{i}) = \alpha\,\hat{\tau(i)}$).

- et tel que, si l'on définit toujours ϕ dans $\mathfrak{h}^*$ par : $\langle \phi(\alpha), u \rangle = \sigma_\phi(\langle \alpha, \phi^{-1}(u) \rangle)$, on ait $\phi(\alpha_i) = \alpha_{\tau(i)}$ (ϕ induit une bijection sur Δ).

En particulier, tout ceci implique $a_{\tau(i),\tau(j)} = a_{i,j}$ pour tous i et j dans $\mathfrak{I}$.

Lorsque σ_ϕ est l'identité, ϕ est un *automorphisme de diagramme* de $\mathfrak{g}$ (resp. de $\mathfrak{h}$).

Le composé de deux semi-automorphismes de diagramme est un semi-automorphisme de diagramme, les applications τ et σ_ϕ correspondantes se composent. La restriction à $\mathfrak{h}$ d'un semi-automorphisme de diagramme de $\mathfrak{g}$ est un semi-automorphisme de diagramme de $\mathfrak{h}$.

Notons qu'un groupe de semi-automorphismes de diagramme stabilise la base Π_1 et son action normalise celle de W; ce qui entraîne la stabilité de $\pm W.\Pi_1$. Par définition, la coracine de l'image d'une racine simple est l'image de la coracine de cette racine simple. Enfin, on peut choisir des coefficients

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

rationnels strictement positifs ε_i pour lesquels la matrice $B = (b_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{I}^2}$ avec $b_{ij} = \varepsilon_i a_{ij}$ est symétrique et qui de plus sont tels que pour tout $\phi \in \Gamma$ et tout $i \in \mathfrak{I}$, si $\phi(\alpha_i)$ est égal à α_k (où $k \in \mathfrak{I}$), alors $\varepsilon_i = \varepsilon_k$.

Démonstration. En effet, les ε_i sont déterminés à une constante rationnelle près, constante qui ne dépend que de la composante connexe de $\mathfrak{I}$ où est situé i.

Si l'on considère une composante connexe Π_1^1 de Π_1, et $\phi \in \Gamma$ stabilisant cette composante connexe, si $\alpha_i \in \Pi_1^1$, alors il existe une famille $(\alpha_{i_d})_{1\leq d\leq q} \subset \Pi_1^1$ telle que $a_{i,i_1}a_{i_1,i_2}\dots a_{i_q,\tau(i)} \neq 0$ et qui de plus est stable sous l'action du sous-groupe de Γ engendré par ϕ.

Il s'agit d'une partie connexe et la sous-algèbre de Kac-Moody-Borcherds engendrée par $\mathfrak{h}$ et les (e_i, f_i) correspondants a une algèbre dérivée qui est simple. La restriction de la forme bilinéaire invariante initiale y est non dégénérée et l'on en définit une seconde en posant $(X,Y)_1 = (\phi(X),\phi(Y))$. Sur l'algèbre dérivée, ces deux formes ne diffèrent que d'une constante. Or, $(\alpha_{\hat{i}},\alpha_{\hat{i}})_1 = (\phi(\alpha_{\hat{i}}),\phi(\alpha_{\hat{i}})) = (\alpha_{\hat{\tau(i)}},\alpha_{\hat{\tau(i)}}) = \varepsilon_{\tau(i)}a_{ii}$. La constante de proportionnalité est donc $\varepsilon_{\tau(i)}/\varepsilon_i$, qui doit ainsi être indépendant de i. Le groupe Γ étant fini, ce rapport doit être une racine $m^{\text{ième}}$ de 1, rationnelle et positive. On a ainsi $\varepsilon_{\tau(i)} = \varepsilon_i$.

Reste à montrer qu'on peut choisir des constantes de proportionnalité correspondant aux composantes connexes de telle sorte que si Γ échange deux composantes, on ait encore la même propriété. Pour voir cela, on partitionne l'ensemble des composantes connexes de $\mathfrak{I}$ en orbites sous l'action de Γ (orbites qui sont bien sûr finies) et il suffit de s'assurer que ce choix est possible dans une telle orbite.

Fixons $\alpha_i \in \Pi_1^1$. Si Π_1^2 est une composante connexe de Π_1 située dans l'orbite de Π_1^1 sous l'action de Γ, il existe $\phi \in \gamma$ tel que pour tout $\alpha_j \in \Pi_1^1$, on ait $\phi(\alpha_j) \in \Pi_1^2$. Fixons un tel ϕ, si $\phi(\alpha_i) = \alpha_k$, on choisit la constante correspondant à la composante Π_1^2 en imposant $\varepsilon_k = \varepsilon_i$.

Il est alors facile de vérifier que pour toute racine α_j située dans la réunion des composantes connexes de $\Gamma.\Pi_1^1$, si $\gamma(\alpha_j) = \alpha_h$ pour un $\gamma \in \Gamma$, on a bien $\varepsilon_h = \varepsilon_j$. □

Ainsi, on peut affirmer qu'un groupe de semi-automorphismes de diagramme est un groupe de semi-automorphismes compatible à la réalisation.

Au n°8 du paragraphe 1, nous avons expliqué comment choisir une base du système de racines compatible à la notion de S.G.R. de [Ba]. Notons qu'il est possible d'imposer en plus, lors de ce choix, que les éléments de la nouvelle base vérifient : si $\phi(\mathbb{Q}_+\alpha_i) = \mathbb{Q}_+\alpha_j$ (i et j étant dans I), alors $\phi(\alpha_i) = \alpha_j$. L'application τ induit alors une bijection sur I. On note encore ϕ, l'action τ induite sur les ensembles d'indices I et $\mathfrak{I}$ ainsi que l'action $\mathbb{Q}$-linéaire définie sur $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}$ par $\phi(\widetilde{\alpha}_i) = \widetilde{\alpha}_{\tau(j)} = \widetilde{\alpha}_{\phi(j)}$.

Pour "l'action étoile" définie ci-dessus, on a encore $\phi^*(\alpha_i) = \alpha_{\phi(i)}$ et il est clair que ϕ^* induit un automorphisme de diagramme (compatible à la matrice $(\langle \alpha_j, \alpha\,\hat{i}\,\rangle)_{(i,j)\in I^2}$ au sens de [Ba; §6.1]) du S.G.R construit en 1.8. Comme pour Γ^0, la restriction de $(.,.)$ à $\mathfrak{h}^{\Gamma^*}$ est non dégénérée et $(\mathfrak{h}^*)^{\Gamma^*}$ s'identifie à son dual.

Le système de racines relatives et la sous algèbre $\mathfrak{t}$

Dans la suite, nous considérons Γ un groupe fini de semi-automorphismes de diagramme de $\mathfrak{h}$. Les notations introduites dans le cas général au A. de ce §4 sont conservées; en particulier, l'hypothèse (C) est supposée vérifiée si $\Gamma \neq \Gamma^0$ et $\mathfrak{g}$ est munie de la forme bilinéaire invariante sous l'action de Γ construite au lemme 4.1.

La fonction hauteur du § 1 n°9 peut être supposée invariante par Γ : on remplace θ par θ' définie par $\theta'(\alpha) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \theta(\gamma.\alpha)$.

Pour toute racine α, définissons $\bar{\alpha} = (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^*(\alpha) \neq 0$. La non nullité de $\bar{\alpha}$ résulte de la propriété (A) (cf. §1 n°7) de la réalisation.

Notons que $\mathfrak{t}$, l'ensemble des points fixes de $\mathfrak{h}$ sous les deux actions de Γ contient toujours le k-espace $\sum_{\alpha\in\Delta} k\nu^{-1}(\bar{\alpha})$.

Remarques. 1. Lorsque Γ est un groupe d'automorphismes de diagramme de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, le sous-espace $\mathfrak{t}$ est donc (à une partie du centre près) la sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds $\mathfrak{g}^\Gamma$ (cf. [Bo]).

2. Dans le cas d'une forme presque-déployée d'une algèbre de Kac-Moody, la sous-algèbre $\mathfrak{t}$ est (essentiellement) la sous-algèbre torique déployée maximale de cette forme [B$_3$R].

Définition. Le *système des racines relatives* est l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{t}$ des racines.

Remarque. Comme dans la partie précédente, nous devons nous contenter, dans le cas général, d'étudier $\bar{\Delta}$ et non $\bar{\Delta}_1$. D'après la seconde assertion du lemme 4.2, on peut identifier ce système de racines et l'ensemble : $\bar{\Delta} := \{\bar{\alpha}\ ;\ \alpha \in \Delta\,\}$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

Ce passage au quotient (qui correspond à l'étude des formes quasi-déployées des algèbres de Kac-Moody, cf. [B_3R]) est étudié dans [Ba]. D'après [Ba; 6.1.8], il existe un S.G.R. dont :

- la base est située dans $\bar{\Delta}_+$ (et même dans $\cup_{i\in I/\Gamma}\mathbb{N}\bar{\alpha}_i$) ,
- le système de racines est exactement $\bar{\Delta}$,
- les deux espaces en dualité étant $\mathfrak{h}^\Gamma$ et $(\mathfrak{h}^*)^{\Gamma^*}$.

De plus, l'hypothèse (BN) imposée précédemment passe au quotient.

Les racines relatives simples réelles sont les $\bar{\alpha}_i$ où i est tel que $A(\Gamma i)$ soit une matrice de Cartan. Le groupe de Weyl est le sous-groupe de W noté W^Γ formé des éléments w qui pour tout $\gamma \in \Gamma$, vérifient $(\gamma^*)^{-1}\circ w\circ\gamma^* = w$. Ce sous-groupe est engendré par les éléments de plus grande longueur des sous-groupes $W(\Gamma i)$ (où $W(J)$ désigne le sous-groupe de W engendré par les r_j pour $j \in J$) pour les orbites du type précédent, éléments qui induisent sur $\mathfrak{h}^*$ les réflexions par rapport aux racines relatives simples réelles.

Notons que, si Γ est un groupe de semi-automorphismes de diagramme de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, pour tout élément w de ce groupe de Weyl relatif, il existe un automorphisme σ de $\mathfrak{g}$ qui commute à l'action de Γ et qui prolonge l'action de w sur $\mathfrak{h}$. Il suffit en effet de le montrer pour les réflexions par rapport aux racines relatives simples réelles. Or, ces reflexions sont les éléments de plus grande longueur des groupes $W(\Gamma.i)$ (pour les orbites $\Gamma.i$ de type fini). Ces orbites peuvent être de deux types : $A_1\times A_1\times\ldots\times A_1$ ($\Gamma.i = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$) ou $A_2 \times A_2 \times \ldots \times A_2$ ($\Gamma.i = \{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_n, j_n\}$).

- Dans le premier cas, $\sigma = \prod \tau_{i_k}$ (produit commutatif) et le résultat est clair car les τ_i définis au §1 n° 5 vérifient $\gamma\tau_i\gamma^{-1} = \tau_{\gamma.i}$.
- Dans le second cas, $\sigma = \prod(\tau_{i_k}\tau_{j_k}\tau_{i_k})$ et le résultat vient de la relation classique de tresse $\tau_{i_k}\tau_{j_k}\tau_{i_k} = \tau_{j_k}\tau_{i_k}\tau_{j_k}$.

La décomposition de $\mathfrak{g}$ sous l'action adjointe de $\mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$ (resp. de $\mathfrak{t}$) s'écrit :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\bar{\alpha}\in\bar{\Delta}}\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}})$$

où :

$$\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}} = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, [H, X] = \bar{\alpha}(H)X \ \ \forall H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}\} = \oplus_{\{\alpha\in\Delta\,;\,\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma(\alpha)=|\Gamma|\bar{\alpha}\}}\,\mathfrak{g}_\alpha$$

(resp. idem en notant encore $\bar{\alpha}$ la restriction de $\bar{\alpha}$ à $\mathfrak{t}$).

L'espace $\mathfrak{h}$ est le centralisateur de $\mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$ (resp. de $\mathfrak{t}$) dans $\mathfrak{g}$. La forme bilinéaire $(.,.)$ est encore graduée par rapport à cette décomposition; en particulier, si $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$, les sous-espaces $\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}$ et $\mathfrak{g}_{-\bar{\alpha}}$ sont duaux.

Notre but est à présent d'étudier, dans le cas où Γ *est un groupe de semi-automorphismes de diagramme de* $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$*, les* k*-sous-algèbres de* $\mathfrak{g}$ *stables sous les actions de* $\mathfrak{t}$*, de* Γ *et sur lesquelles la restriction de la forme bilinéaire précédemment définie est non dégénérée et à valeurs dans* k*. Nous allons donc introduire des "outils" analogues à ceux utilisés dans le cas des sous-algèbres birégulières au* §3.

Notons que pour le résultat qui suit, l'hypothèse " Γ est un groupe de semi-automorphismes de diagramme de $\mathfrak{h}$" suffit.

Lemme 4.3. *Pour toute racine relative* $\bar{\alpha}$*, l'élément* $\nu^{-1}(\bar{\alpha})$ *de* $\mathfrak{t}$ *est une coracine de* $\bar{\alpha}$ *(au sens de* [Ba]*) à une constante rationnelle strictement positive près.*

Démonstration. En effet, si $\bar{\alpha}\in\bar{\Delta}^{\mathrm{re}}$, elle est conjuguée sous l'action de W^{Γ} à une racine relative simple $\bar{\alpha}_i$ réelle (ou encore $2\bar{\alpha}_i$), or par définition [Ba], pour $i\in I$, la coracine $\bar{\alpha}\,\hat{}_i$ est la somme des éléments de l'orbite de $\alpha\,\hat{}_i$ sous l'action de Γ. Par invariance de la forme bilinéaire sous l'action de Γ, la constante rationnelle de proportionalité entre $\nu^{-1}(\alpha)$ et $\alpha\,\hat{}$ ne dépend pas de l'élément de l'orbite considérée. Ceci établit le résultat : $\bar{\alpha}\,\hat{}_i$ est $\mathbb{Q}$-colinéaire à $\nu^{-1}(\bar{\alpha}\,\hat{}_i)$ pour $i\in I$.

Toujours grâce à l'action de W^{Γ}, on peut, pour les racines imaginaires, ne considérer que le cas des racines négatives contre toutes les coracines $\bar{\alpha}\,\hat{}_i$. Il suffit alors de démontrer que $\nu^{-1}(\bar{\alpha})\neq 0$ (ce qui résulte de l'injectivité de ν) et que $\langle\bar{\alpha}_i,\nu^{-1}(\bar{\alpha})\,\rangle$ est du même signe que $\langle\bar{\alpha},\bar{\alpha}\,\hat{}_i\,\rangle$. Mais ceci est clair puisque $\langle\bar{\alpha},\bar{\alpha}\,\hat{}_i\,\rangle=(\nu^{-1}(\bar{\alpha}),\bar{\alpha}\,\hat{}_i)$ vaut (à une constante strictement positive près) $\langle\bar{\alpha}_i,\nu^{-1}(\bar{\alpha})\,\rangle$. ∎

Jusqu'à la fin du §6, Γ désigne un groupe fini de semi-automorphismes de diagramme de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Lemme 4.4. *Si* $\bar{\alpha}$ *est une racine relative, soient* $X\in\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}$ *et* $Y\in\mathfrak{g}_{-\bar{\alpha}}$ *tels que* $(X,Y)\in k\setminus\{0\}$*, alors* $[X,Y]\neq 0$ *et* $\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma([X,Y])\neq 0$.

Lorsque Γ *est un groupe d'automorphismes linéaires, on a :* $\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma([X,Y])=|\Gamma|.(X,Y).\nu^{-1}(\bar{\alpha})$.

Remarque. Pour démontrer ce résultat nous allons calculer le crochet de ces deux éléments X et Y. Ce calcul et les notations introduites nous seront utiles dans la suite.

Démonstration. Pour calculer le crochet de X et Y, considérons leurs décompositions dans $\mathfrak{g}$ en tant qu'algèbre graduée par $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}$, on a : $X = \sum X_{\tilde{\alpha}}$ et $Y = \sum Y_{\tilde{\alpha}}$ où $\widetilde{\alpha}$ parcourt l'ensemble des racines du système à base libre $\widetilde{\Delta}$, telles que $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\psi(\widetilde{\alpha})) = |\Gamma| \bar{\alpha}$ (où ψ a été définie au §1 n°7). Soient $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ de telles racines, supposées distinctes, alors il est clair qu'elles ont même hauteur dans $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}$ (où la hauteur est définie comme valant $\theta(\alpha_i) \geq 1$ sur chaque $\widetilde{\alpha}_i$); par suite, leur différence ne peut pas être une racine. Le crochet $[X_{\tilde{\alpha}}, Y_{\tilde{\beta}}]$ est donc nul dès que $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}$ et l'on obtient : $[X,\ Y] = \sum [X_{\tilde{\alpha}},\ Y_{\tilde{\alpha}}] = \sum (X_{\tilde{\alpha}},\ Y_{\tilde{\alpha}})\, \nu^{-1}\, (\psi(\tilde{\alpha}))$. De même $(X,\ Y) = \sum (X_{\tilde{\alpha}}, Y_{\tilde{\alpha}})$.

L'extension $[\mathbb{K}, k]$ est de dimension finie (puisque son groupe de Galois s'identifie à Γ/Γ^0). Notons $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_q$ une base de cette extension telle que $\eta_0 = 1 \in k$ et que $\sum_{j=1}^{j=q} k\, \eta_j$ soit stable sous $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}, k)$ (cet espace noté $\mathbb{K} - k$ est alors forcément le noyau de la trace). Pour chaque racine $\widetilde{\alpha}$, le scalaire $(X_{\tilde{\alpha}}, Y_{\tilde{\alpha}})$ s'écrit sous la forme $\sum_h c_{\tilde{\alpha},h} \eta_h$ (où $c_{\tilde{\alpha},h} \in k$) et $\sum_{\tilde{\alpha}} c_{\tilde{\alpha},0} = (X, Y) \neq 0$.

Considérons alors $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma([X, Y])$. Le vecteur $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})))$ ne dépend pas du choix de la racine $\widetilde{\alpha}$ telle que $(\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\psi(\widetilde{\alpha}))) = |\Gamma| \bar{\alpha} \neq 0$: il vaut $|\Gamma| \nu^{-1}(\bar{\alpha})$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma([X, Y]) &= (X, Y)|\Gamma|\nu^{-1}(\bar{\alpha}) + \sum_{h=1}^{h=q} \Big(\sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\tilde{\alpha}} \gamma(c_{\tilde{\alpha},h} \eta_h \{\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))\}) \Big) \\ &= (X, Y)|\Gamma|\nu^{-1}(\bar{\alpha}) + \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Big(\sum_{\widetilde{\alpha}} ((X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}}) - c_{\widetilde{\alpha}\, 0}) \nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})) \Big).\end{aligned}$$

Si l'on note $S_X = \{\alpha\, ;\, X_\alpha \neq 0\}$, l'ensemble S_X est fini. La condition (C) assure l'égalité $\sum_{\Gamma.S_X} \mathbb{K}\nu^{-1}(\alpha) = (\sum_{\Gamma.S_X} k\nu^{-1}(\alpha)) \otimes_k \mathbb{K}$. Nous pouvons alors affirmer que $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma([X, Y])$ qui appartient à $\sum_{\Gamma.S_X} \mathbb{K}\nu^{-1}(\alpha)$ est non nul puisque $(X, Y)|\Gamma|\nu^{-1}(\bar{\alpha}) \neq 0$ correspond à sa composante sur $\sum_{\Gamma.S_X} k\nu^{-1}(\alpha)$. □

§5. Sous-algèbres Γ-régulières

On considère toujours l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds $\mathfrak{g}$ et le groupe Γ de semi-automorphismes de diagramme de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ de 4.4.

Nous nous attachons ici à montrer qu'une k-sous-algèbre $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{g}$ stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{t}$ et sous l'action du groupe Γ, sur laquelle la forme *bilinéaire à $\mathfrak{L}$ est à valeurs dans k et non dégénérée possède un système de racines sous l'action de $\mathfrak{t}$ qui est un sous-système de $\bar{\Delta}$.*

Définition. Une k-sous-algèbre $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{g}$ est dite Γ-*régulière* si elle est stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{t}$ (mais pas nécessairement sous celle de $\mathfrak{h}$) ainsi que sous l'action du groupe Γ; elle est Γ-*birégulière* si, de plus, la restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{L}$ est à valeurs dans k et non dégénérée.

Considérons $\mathfrak{L}$ une sous-algèbre Γ-birégulière de $\mathfrak{g}$. Ceci englobe en particulier les cas où $\mathfrak{L}$ est une k-forme de $\mathfrak{g}$ ($\Gamma^0 = \{1\}$) pour un choix adapté de la forme bilinéaire (cas des formes quasi-déployées des algèbres de Kac-Moody) et le cas d'une sous-algèbre stable par un groupe fini d'automorphismes de diagramme compatibles à A (cas $\Gamma = \Gamma^0$).

Sous ces hypothèses, l'algèbre $\mathfrak{L}$ admet la décomposition :

$$\mathfrak{L} = (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\oplus_{\bar{\alpha} \in \Psi} \mathfrak{L} \cap \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}) \text{ où } \Psi = \{\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}\,;\, \mathfrak{L}_{\bar{\alpha}} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}} \neq \{0\}\}.$$

On note alors $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$, la $\mathbb{K}$-sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{L}$. Comme la restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{L}$ est non dégénérée et à valeurs dans k, on a clairement $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{L} \otimes_k \mathbb{K}$ et $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ admet également pour décomposition :

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} = (\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\oplus_{\bar{\alpha} \in \Psi} \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}) \text{ où } \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}} = \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}} \cap \mathfrak{L}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{L}_{\bar{\alpha}} \otimes_k \mathbb{K}.$$

Nous voulons prouver comme au §3 que Ψ est un sous-système de racines de $\bar{\Delta}$. Pour cela, nous montrons l'existence dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ (la $\mathbb{K}$-sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{L}$) de triplets associés aux racines $\bar{\alpha}$ de Ψ, c'est-à-dire de vecteurs $X_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}$, $Y_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\bar{\alpha}}$ tels que $[X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}]$ se comporte dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ comme une coracine de $\bar{\alpha}$. Dans un certain nombre de cas particulièrement intéressants (en particulier pour les racines relatives réelles), nous montrerons qu'on peut effectivement obtenir une coracine (et donc un élément de $Q_{\mathbb{Q}}$ stable sous l'action étoile de Γ), mais nous verrons que ceci n'est pas vrai en général.

La restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$ est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et est encore non dégénérée (car non dégénérée sur $\mathfrak{L}$ et sur $\mathfrak{t}$). On note $\nu_{\mathfrak{L}}$, l'isomorphisme défini de $(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$ sur son dual par : $\nu_{\mathfrak{L}}(h)(t) = (h,t)$ pour tout $(h,t) \in ((\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}})^2$.

La sous-algèbre $(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$ agit diagonalement sur les espaces $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}$ ($\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par $\mathfrak{L}_{\bar{\alpha}}$) pour toute racine relative $\bar{\alpha} \in \Psi$ et on a une décomposition du type :

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}} = \oplus_\mu \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu) \text{ où } \mu \in ((\mathfrak{L}_\mathbb{K} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{t}_\mathbb{K})^*.$$

LEMME 5.1. *Soient $\bar{\alpha}$ une racine relative de Ψ et λ et μ deux poids de la représentation de $(\mathfrak{L}_\mathbb{K} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{t}_\mathbb{K}$ dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}$.*

1) *Si $\mu \neq \lambda$, alors $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu)$ et $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\bar{\alpha}}(-\lambda)$ sont orthogonaux.*

2) *La restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu) \times \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\bar{\alpha}}(-\mu)$ est non dégénérée.*

3) *Le sous-espace $[\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu), \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\bar{\alpha}}(-\mu)]$ est de dimension un sur $\mathbb{K}$. Plus précisément, pour*
$X \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu)$ et $Y \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\bar{\alpha}}(-\mu)$, on a $[X,Y] = (X,Y)\nu_\mathfrak{L}^{-1}(\mu) \in \mathfrak{L}_\mathbb{K} \cap \mathfrak{h}$.

Démonstration. La démonstration de ce lemme est identique à celle de Kac [K; 2.2] en raisonnant dans $\mathfrak{L}_\mathbb{K} + \mathfrak{t}_\mathbb{K}$. □

Si μ est un poids de cette représentation, notons Γ^μ le stabilisateur dans Γ de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu)$ (où $\bar{\alpha}$ est la restriction de μ à $\mathfrak{t}_\mathbb{K}$). Soient $X \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu)$ et $Y \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\bar{\alpha}}(-\mu)$ tels que $(X,Y) = 1$. Si $\gamma \in \Gamma^\mu$, par k-linéarité de γ, on a $\gamma([X,Y]) = (X,Y)\gamma(\nu_\mathfrak{L}^{-1}(\mu)) = (X,Y)\nu_\mathfrak{L}^{-1}(\mu) = [X,Y]$. Par suite, $[X,Y] \in (\mathfrak{L}_\mathbb{K} \cap \mathfrak{h})^{\Gamma^\mu}$.

PROPOSITION 5.2. *Pour toute racine relative $\bar{\alpha}$ de Ψ, il existe dans $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$ un triplet adapté $(X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}, [X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}])$ au sens où $[X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}]$ se comporte comme $\nu^{-1}(\bar{\alpha})$ vis-à-vis des poids intervenant dans la décomposition de $\mathfrak{L}_\mathbb{K}$ sous l'action de $\mathfrak{t}_\mathbb{K} + (\mathfrak{L}_\mathbb{K} \cap \mathfrak{h})$. Plus précisément, $[X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}]$ est, à un élément du centre de $\mathfrak{L}_\mathbb{K} + \mathfrak{t}_\mathbb{K}$ près, égal à $\nu^{-1}(\bar{\alpha})$ (autrement dit $(X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}, [X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}])$ est un triplet associé à la racine $\bar{\alpha}$ dans la sous-algèbre $\mathfrak{L}_\mathbb{K} + \mathfrak{t}_\mathbb{K}$).*

De plus, lorsque la racine relative $\bar{\alpha}$ est réelle, $[X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}]$ est k-proportionnel à $\nu^{-1}(\bar{\alpha})$.

Remarque. Dans le cas d'une racine réelle, nous établissons dans la démonstration ci-dessous un résultat intéressant :

avec les notations de 4.4, si $\bar{\alpha}$ est une racine réelle et si X et Y sont des vecteurs de poids pour la représentation de $(\mathfrak{L}_\mathbb{K} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{t}_\mathbb{K}$ dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}$, alors $(X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}})$ est indépendant du choix de $\widetilde{\alpha}$ intervenant dans la décomposition de $[X,Y] = \sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}}) \nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))$ obtenue comme en 4.4.

Démonstration. 1) Soit μ un poids, considérons $X \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu) \setminus \{0\}$ et $Y \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\bar{\alpha}}(-\mu)$ tels que $(X,Y) = 1$ et reprenons les notations de 4.4 pour la décomposition par rapport au système de racines à base libre de $\mathfrak{g}$. On a $X = \sum X_{\widetilde{\alpha}}$ et $Y = \sum Y_{\widetilde{\alpha}}$ avec $X_{\widetilde{\alpha}} \in \mathfrak{g}_{\widetilde{\alpha}}$ et $Y_{\widetilde{\alpha}} \in \mathfrak{g}_{-\widetilde{\alpha}}$ où les racines $\widetilde{\alpha}$ sont telles que la restriction de $\psi(\widetilde{\alpha})$ à $(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$ soit égale à μ.

Alors, $[X, Y] = \sum (X_{\tilde{\alpha}}, Y_{\tilde{\alpha}}) \nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})) = V + U$ où, toujours avec les notations de 4.4,
$V = \sum_{\widetilde{\alpha}} c_{\widetilde{\alpha}0} \nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))$ et $U = \sum_{\widetilde{\alpha}} ((X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}}) - c_{\widetilde{\alpha}0}) \nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))$ et sont tous deux fixes sous Γ^{μ}.

Soit $\bar{\beta} \neq \bar{\alpha}$ une racine relative située dans Ψ et λ un poids intervenant dans la décomposition de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\beta}}$ sous l'action de $(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$ (i.e. dont la restriction à $\mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$ est $\bar{\beta}$). Soit $Z \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\beta}}(\lambda)$, calculons $[[X, Y], Z]$:

$$\begin{aligned}
[[X, Y], Z] &= \lambda([X, Y])Z = (\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), [X, Y])Z \\
&= (\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), \sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}}) \nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))Z \\
&= \sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}}) (\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), \nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))Z \\
&= \sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}}) \langle \psi(\widetilde{\alpha}), \nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda) \rangle Z \\
&= \left(\sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}}) \right) \mu(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda))Z \\
&= (X, Y)\, \mu(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda))Z = \mu(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda))Z
\end{aligned}$$

puisque toutes les racines $\psi(\widetilde{\alpha})$ admettent μ pour restriction à $(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$ et comme $\sum_{\widetilde{\alpha}} c_{\widetilde{\alpha}0}$ vaut 1, on a aussi :

$$[[X, Y], Z] = \left(\sum_{\widetilde{\alpha}} c_{\widetilde{\alpha}0} \right) \mu\left(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda) \right) Z = \left(\sum_{\widetilde{\alpha}} c_{\widetilde{\alpha}0} \langle \psi(\widetilde{\alpha}), \nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda) \rangle \right) Z.$$

Soit à présent G un ensemble de représentants de Γ/Γ^{μ}. Posons $X_1 = \sum_{g \in G} g.X \in \mathfrak{L}_{\bar{\alpha}}$ et $Y_1 = \sum_{g \in G} g.Y \in \mathfrak{L}_{-\bar{\alpha}}$, alors :

$$[X_1, Y_1] = \sum_{g \in G} g([X, Y]) = \sum_{g \in G} g(V + U) \in (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})^{\Gamma}$$

car si g n'est pas dans Γ^{μ}, alors $\mu - g.\mu$ n'est pas un poids (puisque $\alpha - g.\alpha$ n'est pas une racine).

Notons que $\left(\sum_{g\in G} g.V\right) \in \mathfrak{t}$ puisque :

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G} g.V &= (|G|/|\Gamma|)\sum_{g\in\Gamma} g.V\\ &= (|G|/|\Gamma|)\sum_{g\in\Gamma} g\Big(\sum_{\widetilde{\alpha}} c_{\widetilde{\alpha}\,0}\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))\Big)\\ &= (|G|/|\Gamma|)\Big(\sum_{\widetilde{\alpha}} c_{\widetilde{\alpha}\,0}(\sum_{g\in\Gamma} g.\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})))\Big)\\ &= |G|(\sum_{\widetilde{\alpha}} c_{\widetilde{\alpha}\,0})\nu^{-1}(\bar{\alpha})) = |G|\nu^{-1}(\bar{\alpha}) \in \mathfrak{t}.\end{aligned}$$

Montrons alors que $\sum_{g\in G} g(U)$ est dans le centralisateur de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$. Avec les notations précédentes, $g.X$ et $g.Y$ sont des vecteurs de poids $g.\mu$ et $-g.\mu$ et nous avons encore $(g.X, g.Y) = 1$ et $(g.\mu)(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda)) = (\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), g.\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})))$ pour tout $\widetilde{\alpha}$ intervenant dans la décomposition de $[X, Y]$ donc :

$$\begin{aligned}[[X_1, Y_1], Z] &= \sum_{g\in G} \lambda(g[X,Y])Z = \sum_{g\in G}(g.\mu)(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda))Z\\ &= (\sum_{\widetilde{\alpha}} c_{\widetilde{\alpha}\,0})\sum_{g\in G}(g.\mu)(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda))Z\\ &= \sum_{g\in G}\Big(\sum_{\widetilde{\alpha}} c_{\widetilde{\alpha}\,0}(g.\mu)(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda))\Big)Z\\ &= \sum_{g\in G}\Big(\sum_{\widetilde{\alpha}} c_{\widetilde{\alpha}\,0}(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), g.\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))\Big)Z\\ &= \sum_{g\in G}\Big(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), g(\sum_{\widetilde{\alpha}} c_{\widetilde{\alpha}\,0}\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})))\Big)Z\\ &= (\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), \sum_{g\in G} g.V)Z = \lambda(\sum_{g\in G} g.V)Z\\ &= [\sum_{g\in G} g.V; Z].\end{aligned}$$

Enfin, comme $\sum_{g\in G} g.U = [X_1, Y_1] - \sum_{g\in G} g.V \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K}} + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$, l'élément $\sum_{g\in G} g.U$ est dans le centre de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

Comme on vient de voir que $\sum_{g\in G} g.V$ est $\mathbb{Q}$-proportionnel à $\nu^{-1}(\bar{\alpha})$, il suffit de modifier Y_1 par une constante pour obtenir un triplet adapté $(X_1, Y_1, [X_1, Y_1])$.

2) Considérons à présent le cas d'une racine relative réelle $\bar{\alpha}$, c'est-à-dire conjuguée à une racine relative simple réelle ou au double d'une telle racine. Quitte à considérer le problème posé dans une sous-algèbre conjuguée à $\mathfrak{L}$ sous l'action du groupe de Weyl relatif, nous pouvons supposer que $\bar{\alpha}$ est dans $\{\bar{\alpha}_i, 2\bar{\alpha}_i\}$.

Avec les notations précédentes et grâce à la bijectivité de ψ entre $\widetilde{\Delta}^{\mathrm{re}}$ et Δ^{re}, nous avons : $[X, Y] = \sum_\alpha (X_\alpha, Y_\alpha)\nu^{-1}(\alpha)$. La valeur de $\langle \beta, [X, Y]\rangle$ est indépendante de la racine β telle que $\beta_{|[\mathfrak{L}_{\bar{\alpha}}, \mathfrak{L}_{-\bar{\alpha}}]} = \mu_{|[\mathfrak{L}_{\bar{\alpha}}, \mathfrak{L}_{-\bar{\alpha}}]}$. Montrons que, dans l'égalité précédente, (X_α, Y_α) est indépendant de α. Compte tenu de 1), ceci achèvera la démonstration (puisqu'alors $U = 0$).

Comme indiqué en remarque, cette démonstration est valable dans un cadre un peu plus général, c'est pourquoi nous n'utiliserons pas ici l'hypothèse $(X, Y) \in k$ *mais seulement le fait que* $(X, Y) \neq 0$. (*Nous ne pouvons donc plus supposer* $[X, Y]$ *fixe sous* Γ^μ).

L'orbite sous l'action de Γ^μ d'une racine α_i pour laquelle $\bar{\alpha}_i$ est réelle ne peut être que de l'un des types suivants:

$A_1 \times A_1 \ldots \times A_1$

$A_2 \times A_2 \ldots \times A_2$,

le double (apparaissant dans le second cas) d'une racine réelle relative étant induit par les racines $\alpha_i + \alpha_{i+1}$ pour $i = 1 \pmod 2$ (i.e. tel que $a_{i,i+1} = -1$).

De plus, pour une racine réelle, on sait que si α est une racine, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_i$ implique $\alpha \in \Gamma\alpha_i$.

- Dans le premier cas, il est clair que si α intervient dans la décomposition de X, alors $\alpha([X, Y]) = (X_\alpha, Y_\alpha)\alpha(\nu^{-1}(\alpha))$. Or, le scalaire $\alpha(\nu^{-1}(\alpha))$ ne dépend pas du choix de l'élément choisi dans l'orbite sous Γ^μ; par suite, (X_α, Y_α) est indépendant de α intervenant dans la décomposition de X.
- Dans le second cas, si la racine $2\bar{\alpha}_i$ est dans le sous-système, la démonstration est identique à la précédente.

Si au contraire la racine $\bar{\alpha}_i$ est dans le sous-système, l'étude se résume à deux cas.

a) Supposons que deux racines liées (disons α_1 et α_2 telles que $a_{12} = -1$) interviennent dans la décomposition de X et de Y. Montrons alors que si une autre racine (disons α_3) intervient, il en est même de α_4 (telle que $a_{34} = -1$);

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

autrement dit que les racines qui interviennent dans la décomposition de X et de Y se rangent par paire de racines liées.

Supposons au contraire $(X_{\alpha_4}, Y_{\alpha_4})$ nul.

1) Les égalités $\alpha_3([X,Y])) = (X_3,Y_3)\alpha_3(\nu^{-1}(\alpha_3))$ et $\alpha_4([X,Y]) = (X_3,Y_3)\alpha_4(\nu^{-1}(\alpha_3))$ imposent alors $\alpha_3([X,Y])) = -2\alpha_4([X,Y])$.

2) Rappelons que toutes les racines qui interviennent dans la décomposition de X ou Y induisent la même forme linéaire μ sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{K}} + (\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h})$.

Le sous-espace $[\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}, \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\bar{\alpha}}]$ est, comme $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$, stable sous l'action de Γ. Soit alors $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(3) = 4$ (alors $\gamma(4) = 3$ puisque $\langle \gamma(\alpha_3), \gamma(\check{\alpha_4}) \rangle = \langle \alpha_3, \check{\alpha_4} \rangle$), alors $\gamma(\alpha_3) = \gamma \circ \alpha_3 \circ \gamma^{-1} = \alpha_4$. Comme $\gamma^{-1}([X,Y])$ est aussi dans $\mathfrak{t}_{\mathbb{K}} + (\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h})$, nous savons que :
$\alpha_1(\gamma^{-1}([X,Y])) = \alpha_2(\gamma^{-1}([X,Y])) = \alpha_3(\gamma^{-1}([X,Y])) = \gamma^{-1}(\alpha_4([X,Y])) \neq 0.$

3) Ceci prouve que $\gamma(\alpha_1)$ ou $\gamma(\alpha_2)$ (disons $\gamma(\alpha_1)$) intervient dans les décompositions de X et de Y donc $\gamma(\alpha_1) = \gamma \circ \alpha_1 \circ \gamma^{-1}$, α_1, α_3 coïncident sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{K}} + (\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h})$ donc sur $[\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}, \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\bar{\alpha}}]$ qui est stable sous l'action de Γ. Ainsi, d'une part : $\gamma(\alpha_1)([X,Y]) = \alpha_1([X,Y]) = \alpha_3([X,Y])$ et d'autre part : $\gamma(\alpha_1)([X,Y]) = \gamma \circ \alpha_1(\gamma^{-1}([X,Y])) = \gamma \circ \alpha_3(\gamma^{-1}([X,Y])) = \alpha_4([X,Y])$. On doit ainsi avoir $\alpha_3([X,Y]) = \alpha_4([X,Y])$, ce qui est impossible d'après 1).

Soient deux paires de racines simples (α_i, α_{i+1}) et (α_j, α_{j+1}) intervenant dans la décomposition, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha_i([X,Y]) &= \alpha_{i+1}([X,Y]) = \alpha_j([X,Y]) \\
&= \varepsilon_i((X_{\alpha_i}, Y_{\alpha_i}) - 1/2(X_{\alpha_{i+1}}, Y_{\alpha_{i+1}})) \\
&= \varepsilon_i(-1/2(X_{\alpha_i}, Y_{\alpha_i}) + (X_{\alpha_{i+1}} Y_{\alpha_{i+1}})) \\
&= \varepsilon_i((X_{\alpha_j}, Y_{\alpha_j}) - 1/2(X_{\alpha_{j+1}}, Y_{\alpha_{j+1}}));
\end{aligned}$$

ce qui impose l'égalité de tous les scalaires $(X_{\alpha_h}, Y_{\alpha_h})$ (car ε_i est indépendant de i choisi dans $\Gamma.i$).

b) Sinon dans la décomposition de X, seule une racine α_i par paire A_2 intervient et le raisonnement du cas $A_1 \times A_1 \ldots \times A_1$ permet de conclure de la même façon. □

Remarque. Notons que dans la démonstration précédente, on ne peut pas (pour $\bar{\alpha}$ imaginaire quelconque) supposer $[X,Y] \in \sum k\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))$.

Considérons en effet le cas suivant : $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Kac-Moody sur

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

$\mathbb{C}$ associée à la matrice (de rang 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et une réalisation de Kac.

Supposons alors que $\Gamma = \{\gamma, id\}$ où γ est d'ordre deux et $\gamma(e_1) = e_4$, $\gamma(f_1) = f_4$ (donc $\gamma(\check{\alpha_1}) = \check{\alpha_4}$) et $\gamma(e_2) = e_3$, $\gamma(f_2) = f_3$ (donc $\gamma(\check{\alpha_2}) = \check{\alpha_3}$) et où σ_γ correspond à la conjugaison de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Considérons les racines $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\beta = \alpha_3 + \alpha_4$ qui induisent la même racine relative imaginaire $\bar{\alpha}$ ainsi que les éléments $E_\alpha = [e_1, e_2], F_\alpha = c_\alpha[f_1, f_2]$ et $E_\beta = [e_3, e_4], F_\beta = c_\beta[f_3, f_4]$ des espaces radiciels $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\beta$, $\mathfrak{g}_{-\beta}$ avec c_α et c_β tels que $(E_\alpha, F_\alpha) = (E_\beta, F_\beta) = 1$.

Soient $\mathfrak{L}_{\bar{\alpha}} = \mathbb{R}((1+i)E_\alpha + (1-i)E_\beta)$ et $\mathfrak{L}_{-\bar{\alpha}} = \mathbb{R}(F_\alpha + F_\beta)$ et $\mathfrak{L}$ la $\mathbb{R}$-sous-algèbre engendrée par ces deux sous-espaces.
On a $[(1+i)E_\alpha + (1-i)E_\beta, F_\alpha + F_\beta] = \nu^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + i\nu^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)$; soit (avec les notations de la démonstration précédente) $U = i\nu^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)$ et donc effectivement $\alpha(i\nu^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)) = \beta(i\nu^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)) = 0$.

Par suite, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\bar{\alpha}} + \mathfrak{L}_{-\bar{\alpha}} + k(\nu^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + i\nu^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4))$ est une sous-algèbre Γ-birégulière mais $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ ne rencontre pas $\mathfrak{t}$.

Proposition 5.3. *L'ensemble des racines relatives intervenant dans la décomposition d'une sous-algèbre Γ-birégulière est un sous-système de racines de $\bar{\Delta}$.*

Démonstration. L'axiome (SSR1) résulte de la non dégénérescence de la restriction de la forme bilinéaire. Pour (SSR2), considérons deux racines relatives $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ distinctes et non opposées (ou seulement non $\mathbb{Q}$-proportionnelles) intervenant dans la décomposition de $\mathfrak{L}$, pour lesquelles $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta}\check{\ } \rangle < 0$. D'après la proposition précédente, les hypothèses des propositions 2.1 et 2.2 sont vérifiées (en remplaçant $\mathfrak{h}$ par $\mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$ et $\mathfrak{L}$ par $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$) et ceci permet de prouver (SSR2). Pour montrer (SSR3), on remarque que l'on peut, grâce à (SSR1), supposer $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta}\check{\ } \rangle < 0$ et le résultat découle alors comme ci-dessus de la proposition 2.1. ∎

Remarque. La seconde partie de la démonstration de la proposition 5.2 (cf. remarque 5.2) permet de démontrer le résultat suivant :

si une racine réelle $\bar{\alpha}$ intervient effectivement dans la décomposition d'une sous-algèbre Γ-birégulière $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{g}$, alors tous les espaces de poids $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu)$ sont de dimension un sur k et forment une unique orbite sous Γ.

Autrement dit, on a : $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}} = \oplus_{\Gamma/\Gamma^{\mu}}\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\gamma.\mu)$ avec $\dim \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu) = 1$.

§6. Sous-algèbres Γ-très-régulières

Étant donnés une sous-algèbre Γ-birégulière $\mathfrak{L}$ associée au sous-système Ψ de $\bar{\Delta}$ et Ω un sous-sytème "réduit" et "presque-clos" de Ψ, nous construisons ici une sous-algèbre de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ qui est une algèbre de Kac-Moody-Borcherds et dont le système de racines par rapport à $\mathfrak{t}$ est Ω.

Soient $\mathfrak{L}$ une sous-algèbre Γ-birégulière, Ψ son système de racines et Ω un sous-sytème "réduit" et "presque-clos" (cf. § 3) de Ψ. On note Φ une base de Ω contenue dans Δ_+.

À toute racine $\bar{\alpha} \in \Phi$, on associe un triplet adapté (au sens de 5.2) avec $X_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}} \setminus \{0\}$ et $Y_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\bar{\alpha}}$. De plus, si $\bar{\alpha}$ est réelle, on peut supposer $[X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}] \in \mathfrak{t}$ et même $[X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}] = \bar{\alpha}\hat{}$ imposant ainsi à $X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}, [X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}]$ (resp. $X_{\bar{\alpha}}, 2Y_{\bar{\alpha}}, 2[X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}]$) si $2\bar{\alpha} \notin \bar{\Delta}$ (resp. $2\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$) de former un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.

Proposition 6.1. *La k-sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ engendrée par les $X_{\bar{\alpha}}$, $Y_{\bar{\alpha}}$ et $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}$ est l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds associée à la matrice $B = \Big(\bar{\beta}([X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}])\Big)$ pour tous $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ dans Φ et la réalisation déduite de cette construction.*

Remarque. Notons que $\mathfrak{k}$ est une k-sous-algèbre de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ mais pas forcément de $\mathfrak{L}$.

Définition. Cette sous-algèbre est dite Γ-très-régulière si elle est de plus stable sous l'action de Γ (elle est alors Γ-régulière).

Remarque. Ceci est possible lorsque pour tout $\bar{\alpha} \in \Phi$, on a $\mathfrak{L}^{\Gamma}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}} \neq \{0\}$ (ou plus généralement s'il existe $X_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}$, $Y_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\bar{\alpha}}$ tels que $kX_{\bar{\alpha}}, kY_{\bar{\alpha}}$ soient stables sous Γ et $(X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}) \neq 0$).

Démonstration. La matrice B ainsi obtenue est une matrice de Kac-Moody-Borcherds puisque par construction, $\bar{\beta}([X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}]) = \bar{\beta}(\nu^{-1}(\bar{\alpha}))$ si $\bar{\alpha}$ est imaginaire et $\bar{\beta}([X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}]) = \bar{\beta}(\bar{\alpha}\hat{})$ si elle est réelle. Comme dans le § 3, il est clair que $\mathfrak{k}$ est le quotient de l'algèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}(B)$ par un idéal intersectant $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ trivialement. Reste à montrer que $\mathfrak{k}$ est bien l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds, c'est-à-dire que l'idéal est bien maximal. Le raisonnement, pour obtenir ce résultat, est tout à fait analogue à celui exposé au § 3. □

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

Remarque. La restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{k}$ est à valeurs dans k et non dégénérée. Si $\mathfrak{k}$ est Γ-très-régulière, elle est aussi Γ-birégulière.

Remarque. Cas des sous-algèbres de Kac-Moody

Dans le cas d'un sous-système réduit et presque-clos admettant pour base une famille de racines réelles la construction de la k-sous-algèbre de Kac-Moody associée à ce sous-système donne une k-sous-algèbre pour laquelle $[\mathfrak{k}_{\bar{\alpha}}, \mathfrak{k}_{-\bar{\alpha}}] \subset \mathfrak{t}$ pour toute racine relative $\bar{\alpha}$.

Construction de la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ à l'intérieur de $\mathfrak{L}$:

Il est clair que dans le problème de la construction de la sous-algèbre $\mathfrak{k}$, les cas intéressants sont ceux pour lesquels on peut construire cette k-algèbre de Kac-Moody-Borcherds à l'intérieur de la k-sous-algèbre $\mathfrak{L}$ donnée initialement. (*Nous aborderons en particulier le problème analogue dans le cas des k-formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody, en construisant à l'intérieur de celles-ci des k-formes déployées ayant presque le même système de racines.*)

1. En réalité, il est clair que nous avons d'ores et déjà obtenu ce résultat dans le cas où Γ est un groupe fini d'automorphismes de diagramme (i.e. quand $k = \mathbb{K}$ puisque $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$).

2. Avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $k = \mathbb{R}$, si $\mathfrak{L}$ est stable sous la semi-involution de Cartan et si elle vérifie $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subset \mathfrak{L}^{\Gamma}$, cette construction est encore possible sous la condition supplémentaire suivante (équivalente à (SGRord) de [Ba] et généralisant (A)) :

($\mathrm{A}_{\mathbb{R}}$) Toute combinaison linéaire à coefficients réels positifs non tous nuls des racines simples est non nulle.

Il s'agit alors de construire les triplets associés aux éléments de la base Φ de Ω à l'intérieur de la k-sous-algèbre $\mathfrak{L}$.

Soit $\bar{\alpha} \in \Phi$, on fixe $X \in \mathfrak{L}_{\bar{\alpha}} \setminus \{0\}$, alors $\omega(X) \in \mathfrak{L}_{-\bar{\alpha}}$ et (avec les notations de 4.4) le scalaire $(X, \omega(X)) = \sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, \omega(X_{\widetilde{\alpha}}))$ est strictement négatif (puisque chaque terme est un réel négatif).

On a alors :

$$[X, \omega(X)] = \sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, \omega(X_{\widetilde{\alpha}})) \nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))$$

qui est une combinaison linéaire à coefficients tous négatifs et non tous nuls de racines positives.

D'après [Ba; 4.2.5], le crochet $[X, \omega(X)]$ est non nul (cf. ($\mathrm{A}_{\mathbb{R}}$)).

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

La décomposition de X dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}} = \oplus_\mu \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu)$ (sous l'action de $(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}})$) s'écrit $X = \sum_\mu X_\mu$ et $[X, \omega(X)] = \sum_\mu (X_\mu, \omega(X_\mu))\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\psi(\mu)) = \sum_\mu (\sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, \omega(X_{\widetilde{\alpha}}))\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})))$ où dans la seconde somme $\widetilde{\alpha}$ parcourt l'ensemble des racines pour lesquelles la restriction de $\psi(\widetilde{\alpha})$ à $(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{t}_{\mathbb{K}}$ est μ.

De plus, l'égalité $(X_\mu, \omega(X_\mu)) = \sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, \omega(X_{\widetilde{\alpha}}))$ montre que $(X_\mu, \omega(X_\mu))$ est un réel (négatif), on peut donc affimer que $[X_\mu, \omega(X_\mu)]$ est fixe sous Γ^μ le stabilisateur de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\bar{\alpha}}(\mu)$.

Mais, par hypothèse, l'élément $[X, \omega(X)]$ est dans $\mathfrak{L}^\Gamma$ donc :

$$\begin{aligned}
[X, \omega(X)] &= (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma (\sum_\mu (\sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, \omega(X_{\widetilde{\alpha}}))\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))) \\
&= (1/|\Gamma|) \sum_\mu (\sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, \omega(X_{\widetilde{\alpha}}))(\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})))) \\
&= \sum_\mu \left(\sum_{\widetilde{\alpha}} (X_{\widetilde{\alpha}}, \omega(X_{\widetilde{\alpha}}))\nu^{-1}(\overline{\psi(\widetilde{\alpha})}) \right) = (X, \omega(X))\nu^{-1}(\bar{\alpha})
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(X, \omega(X), [X, \omega(X)])$ est un triplet associé à $\bar{\alpha}$.

Compléments : Cas particulier intéressant

Nous nous intéressons à présent, sous quelques hypothèses supplémentaires, à la construction de sous-algèbres Γ-très-régulières incluses dans $\mathfrak{g}^\Gamma$. Ce qui va suivre est en particulier valable dans le cas où Γ agit comme un groupe de Galois (i.e. $\Gamma^0 = \{1\}$) (c'est-à-dire par exemple, à l'intérieur d'une k-forme quasi-déployée d'une algèbre de Kac-Moody).

HYPOTHÉSES. Soit $\bar{\Omega}$ un sous-système de racines réduit et presque-clos de $\bar{\Delta}$. Si α est une racine de Δ, on note Γ_α le stabilisateur du sous-espace radiciel $\mathfrak{g}_\alpha$.

Supposons que pour chaque racine relative $\bar{\alpha} \in \bar{\Omega}$, il existe dans Δ une racine α (qui induit $\bar{\alpha}$ sur $\mathfrak{t}$) pour laquelle $\mathfrak{g}_\alpha^{\Gamma_\alpha^0} \neq \{0\}$ où $\Gamma_\alpha^0 = \Gamma_\alpha \cap \Gamma^0$ (*hypothèse trivialement vérifiée lorsque Γ est un groupe de Galois*).

Nous allons à présent construire dans $\mathfrak{g}^\Gamma$ une sous-algèbre Γ-très-régulière $\mathfrak{k}$ de système de racines $\bar{\Omega}$ et pour laquelle $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}$.

Pour chaque racine relative $\bar{\alpha} \in \bar{\Omega}$, nous devons déterminer un triplet associé à $\bar{\alpha}$, formé d'éléments de $\mathfrak{g}^\Gamma$ et pour lequel l'élément semi-simple est situé dans $\mathfrak{t}$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

Considérons Γ_α le stabilisateur du sous-espace radiciel $\mathfrak{g}_\alpha$. Ce sous-groupe de Γ agit sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}_\alpha^{\Gamma_\alpha^0}$ comme un groupe de Galois (correspondant à une extension de corps $[\mathbb{K}, E]$ où $k \subset E$). Il existe donc un élément non nul X_α de $\mathfrak{g}_\alpha^{\Gamma_\alpha^0}$ fixe sous l'action de ce sous-groupe donc fixe par Γ_α(plus précisément $\mathfrak{g}_\alpha^{\Gamma_\alpha^0} = \mathfrak{g}_\alpha^{\Gamma_\alpha} \otimes_E \mathbb{K}$). Soit alors F un ensemble de représentants de Γ/Γ_α dans Γ; posons : $X_{\bar{\alpha}} = \sum_{\gamma \in F} \gamma.X_\alpha = (1/|\Gamma_\alpha|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma.X_\alpha$.

Comme la forme bilinéaire symétrique est compatible à l'action de Γ, le sous-groupe Γ_α stabilise aussi le sous-espace radiciel $\mathfrak{g}_{-\alpha}^{\Gamma_\alpha^0}$ qui est le dual de $\mathfrak{g}_\alpha^{\Gamma_\alpha^0}$; de plus, la restriction de la forme bilinéaire symétrique au E-espace vectoriel $\mathfrak{g}_\alpha^{\Gamma_\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\Gamma_\alpha}$ est non dégénérée. Par suite, il existe dans $\mathfrak{g}_{-\alpha}^{\Gamma_\alpha}$, un élément Y_α tel que $(X_\alpha, Y_\alpha) \in k \setminus \{0\}$.

Posons enfin : $Y_{\bar{\alpha}} := \sum_{\gamma \in F} \gamma.Y_\alpha = (1/|\Gamma_\alpha|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma.Y_\alpha$.

Si δ et β sont deux racines distinctes situées dans $F.\alpha$, alors $[\mathfrak{g}_\delta, \mathfrak{g}_{-\beta}] = \{0\}$ et $(\mathfrak{g}_\delta, \mathfrak{g}_{-\beta}) = 0$.

Ainsi $(X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}) = \sum_{\gamma \in F} \gamma.(X_\alpha, Y_\alpha) = |F|(X_\alpha, Y_\alpha)$ et $[X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}] = \sum_{\gamma \in F} \gamma.[X_\alpha, Y_\alpha] = (X_\alpha, Y_\alpha) \sum_{\gamma \in F} \nu^{-1}(\gamma.\alpha) = |F|(X_\alpha, Y_\alpha)\nu^{-1}(\bar{\alpha})$.

On obtient ainsi un triplet $(X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}, [X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}])$ associé à la racine $\bar{\alpha}$ avec $X_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}^\Gamma$, $Y_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{g}_{-\bar{\alpha}}^\Gamma$ et $[X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}] \in \mathfrak{t}$.

Dans le cas où $\bar{\alpha}$ est réelle, quitte à multiplier $Y_{\bar{\alpha}}$ par un scalaire de k, on peut supposer de plus qu'il s'agit d'un sl_2-triplet.

Supposons donc donné un sous-système réduit et presque-clos $\bar{\Omega}$ de $\bar{\Delta}$. Notons Ψ la base de ce sous-système (située dans les racines positives de $\bar{\Delta}$); on a :

Proposition 6.2. *La k-sous-algèbre $\mathfrak{k}$ engendrée par les $X_{\bar{\alpha}}, Y_{\bar{\alpha}}$ et $\mathfrak{h}^\Gamma$ pour tous les $\bar{\alpha} \in \Psi$ est une sous-algèbre de Kac-Moody-Borcherds de $\mathfrak{g}^\Gamma$ de système de racines $\bar{\Omega}$, pour laquelle $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}$.*

Remarques. 1. Ce résultat peut encore s'étendre au cas d'un sous-système presque-clos normalisé dont l'ensemble des racines réelles forme un système réduit et pour lequel l'ensemble des multiples de toute racine simple imaginaire non affine $\bar{\alpha}$ est stable sous l'addition ou bien réduit à $\{\bar{\alpha}\}$.

Cependant, si par exemple, pour une racine $\bar{\alpha} \in \Psi$ imaginaire non affine, on a $\mathbb{Z}\alpha \in \bar{\Omega}$, le choix des générateurs pourra se faire de diverses façons :

- si $\alpha \in \Delta^{\mathrm{im}}$ et $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$, on peut choisir deux éléments linéairement indépendants de $\mathfrak{g}_\alpha$.

- si $\bar{\alpha}$ correspond à au moins deux orbites distinctes sous Γ, on peut choisir une racine dans chacune de ces orbites, la construction précédente conduisant encore à des éléments indépendants de $\mathfrak{g}^\Gamma_{\bar{\alpha}}$.

- dans tous les cas, choisir un générateur dans chaque $\mathfrak{g}^\Gamma_{h\bar{\alpha}}$, pour tout $h \in \mathbb{N}$.

- dans tous les cas, choisir un générateur dans chaque $\mathfrak{g}^\Gamma_{h\bar{\alpha}}$, pour tout $h \in \{1, 2\}$.

Comme pour 3.1, on pourra parler de minimalité pour la sous-algèbre construite en choisissant un générateur dans chaque espace $\mathfrak{g}^\Gamma_{h\bar{\alpha}}$ pour $h \in N_{\bar{\alpha},\mathrm{ind}}$ (resp. $h \in N_{\bar{\alpha}}$) pour α imaginaire non affine (resp. pour α imaginaire affine).

2. Pour une racine $\bar{\alpha}$ donnée, on voit qu'il y a de toute façon en général divers choix de générateurs possibles (dès que $\mathfrak{g}_\alpha$ n'est pas de dimension 1 ou que $\bar{\alpha}$ correspond à plusieurs orbites).

3. En particulier, si l'on connait une sous-algèbre Γ-birégulière $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{g}$ de système de racines Θ pour lequel $\bar{\Omega} \subset \bar{\Theta}$, on peut construire la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ à l'intérieur de $\mathfrak{L}$.

Application aux formes quasi-déployées d'algèbres de Kac-Moody

Soit $\mathfrak{g}_k$ une k-forme d'une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$, en fixant un isomorphisme entre $\mathfrak{g}_k \otimes \mathbb{K}$ et $\mathfrak{g}$, on peut considérer l'action du groupe de Galois Γ de $[\mathbb{K}; k]$ sur $\mathfrak{g}$ pour laquelle $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}^\Gamma$. La forme est quasi-déployée si Γ agit comme un groupe de semi-automorphismes de diagramme pour un bon choix de $\mathfrak{h}$ et de Δ_+; le corollaire suivant résulte alors de ce qui précède.

Notons $\bar{\Delta}$ le système de racines relatives correspondant à cette k-forme et $\bar{\Delta}^{\mathrm{red}} = \bar{\Delta} \setminus 2W.\Pi_2$, l'ensemble des racines imaginaires ou non divisibles de $\bar{\Delta}$.

COROLLAIRE 6.3. *Dans une k-forme quasi-déployée $\mathfrak{g}_k$ d'une algèbre Kac-Moody $\mathfrak{g}$, on peut construire une k-sous-algèbre de Kac-Moody-Borcherds déployée admettant pour système de racines $\bar{\Delta}^{\mathrm{red}}$.*

N.B.: Le même résultat est valable en remplaçant $\bar{\Delta}^{\mathrm{red}}$ par $\bar{\Delta} \setminus W.\Pi_2$, l'ensemble des racines imaginaires ou non multipliables de $\bar{\Delta}$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

Remarque. Il n'est pas nécessaire ici que $\bar{\Delta}^{\mathrm{red}}$ soit réduit car on sait (cf. [B_3R]) que pour les racines simples imaginaires $\mathbb{N}\bar{\alpha}_i \subset \bar{\Delta}$ et il suffit :

- si $\bar{\alpha}_i$ est imaginaire non affine de choisir des triplets associés à $\bar{\alpha}_i$ et à $2\bar{\alpha}_i$:

- si $\bar{\alpha}_i$ est imaginaire affine de choisir des triplets associés dans chaque $n\bar{\alpha}_i$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple. L'algèbre $\mathfrak{su}(2,3)$, des matrices respectant (au sens des algèbres de Lie), la forme $(.|.)$ définie dans la base canonique $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ de $\mathbb{C}^5$ par :

$((z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)|(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5)) = z_1\bar{z}'_5 + z_2\bar{z}'_4 + z_3\bar{z}'_3 + z_4\bar{z}'_2 + z_5\bar{z}'_1$, est une forme réelle quasi-déployée de $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(5)$ et son système de racines relatives est du type BC_2.

Le corollaire affirme qu'on peut construire à l'intérieur une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathfrak{so}(3,2)$ (on peut la voir comme l'ensemble des matrices à coeffficients réels de $\mathfrak{su}(3,2)$).

La construction analogue, en considérant à présent le système des racines non multipliables (cf. remarque 2) permet d'obtenir une $\mathbb{R}$-sous-algèbre $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{R})$ vue comme l'ensemble des matrices repectant la forme symplectique s définie sur $\mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2 \oplus \mathbb{R}iu_4 \oplus \mathbb{R}iu_5$ induite par $i(.|.)$.

§7. Semi-automorphismes de première espèce

Pour envisager des résultats analogues aux précédents, dans le cadre des formes presque-déployées d'algèbres de Kac-Moody, nous devons considérer une famille plus large de semi-automorphismes englobant les automorphimes de première espèce correspondant à ces formes et que nous appellerons par analogie les semi-automorphismes de première espèce.

Notre but est alors d'avoir des résultats analogues à ceux obtenus dans le cas d'un groupe fini de semi-automorphismes de diagramme. Pour pouvoir utiliser les résultats de stabilité de la notion de système de racines dans certains quotients obtenus dans [Ba], *nous sommes obligés ici d'introduire de nouvelles hypothèses concernant d'une part l'algèbre* $\mathfrak{g}$ *et la réalisation de* A *et d'autre part le groupe fini de semi-automorphismes* Γ_0. *Pour pouvoir les présenter agréablement, nous devons considérer le cône de Tits ouvert dans un espace adéquat.*

Pour $\mathfrak{g}$ *et la réalisation de* A *satisfaisant toujours aux hypothèses du n°9 du* §1, *nous devons alors imposer la condition* (T) *présentée ci-dessous*

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

ainsi que des conditions plus techniques (D) *et* (E) *déjà nécessaires dans* [Ba] *lors du passage au quotient par "une partie de type fini".*

D'autre part, Γ_0 *doit être un groupe fini de semi-automorphismes, compatible à la réalisation et dont les actions stabilisent* Δ_+^{im} *et le cône de Tits ouvert* (*de tels semi-automorphismes seront dits de première espèce par analogie à ceux intervenant dans l'étude des formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody*). *Enfin la condition* (C) *du* §4.*A doit être satisfaite si* Γ_0 *n'est pas un groupe d'automorphismes.*

Soit Γ_0 groupe fini de k-semi-automorphismes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ compatible à la réalisation. Nous reprenons ici les notations et définitions introduites au A. du paragraphe 4; en particulier Γ_0^0 désigne le sous-groupe des automorphismes linéaires de Γ_0. Lorsque $\Gamma_0^0 \neq \Gamma_0$, la condition (C) est encore supposée vérifiée. Nous considérons alors le supplémentaire $\mathfrak{h}''$ de $\mathfrak{h}' + \mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{h}$ ainsi que la forme bilinéaire invariante choisis comme dans le lemme 4.1. Enfin, nous supposons toujours $\mathfrak{c}' = \{0\}$.

Notons $\mathfrak{s}$ la k-sous-algèbre des points fixes de $\mathfrak{h}$ sous l'action de Γ_0 ainsi que sous son action étoile (cf. §4.A). Alors, la $\mathbb{K}$-algèbre engendrée par $\mathfrak{s}$ est $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{h}^{\Gamma_0{}^*}$.

D'après 4.2, la restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{s}$ est non dégénérée et à valeurs dans k; de plus, pour $\alpha \in \Delta$ et $\beta \in \Delta \cup \{0\}$, on a :

$$\alpha_{|\mathfrak{s}} = \beta_{|\mathfrak{s}} \Longleftrightarrow \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma^* \alpha = \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma^* \beta \,.$$

On note $\Omega = \{\alpha \in \Delta \,;\, \alpha_{\mathfrak{s}} = 0\}$; c'est un sous-système clos de Δ.

Pour utiliser les résultats des paragraphes 4.4 et 5.2 de [Ba], considérons dans $V_{\mathbb{R}}^*$, le $\mathbb{Q}$-dual de $\sum_{i \in I} \mathbb{Q}\alpha_i$ tensorisé par $\mathbb{R}$ (voir aussi [Ba; début du chapitre V]) les ensembles suivants :

- $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$, le sous-espace de $V_{\mathbb{R}}^*$ défini par les équations (dans $\sum_{i \in I} \mathbb{Q}\alpha_i$) nulles sur $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$;

- $C_\emptyset = \{x \in V_{\mathbb{R}}^* \,/\, x(\alpha_i) > 0 \,(\forall\, i \in I_{\mathrm{re}})\}$, la chambre fondamentale "ouverte";

- $\bar{C} = \{x \in V_{\mathbb{R}}^* \,/\, x(\alpha_i) \geq 0 \,(\forall\, i \in I_{\mathrm{re}})\}$, la chambre fondamentale fermée;

- $\mathfrak{T}^\circ = \{x \in V_{\mathbb{R}}^* \,/\, x(\alpha) > 0 \;\; (\text{pour presque tout } \alpha \in \Delta_+^{\mathrm{re}})\}$, le cône de Tits ouvert.

La condition imposée ici est alors :

$$\text{(T)} \qquad \mathfrak{T}^\circ \text{ engendre l'espace } V_{\mathbb{R}}^*.$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

Et nous supposerons de plus comme annoncé que les éléments de Γ sont des semi-automorphismes stabilisent Δ_+^{im} et le cône de Tits ouvert. Généralisant la terminologie utilisée dans l'étude des formes des algèbres de Kac-Moody, nous dirons qu'il s'agit de *semi-automorphismes de première espèce*.

Remarques. 1. Notons enfin que sous "l'hypothèse de rang fini" de [Ba] c'est-à-dire lorsque $A(\mathfrak{I}_{\mathrm{re}})$ est de rang fini (qui sera nécessairement vérifiée au paragraphe 8) et la condition (T), Γ stabilise Δ_+^{im} si et seulement si l'action $\mathbb{R}$-linéaire de Γ_0 sur $V_{\mathbb{R}}^*$ (obtenue par dualité) stabilise le cône de Tits ouvert.

2. la condition (T) permet de montrer que $\mathfrak{T}^\circ = \cup_{w\in W} \cup_{J\subset I; J \text{ de type fini}} w.C_J$ où l'on note C_J la facette $\{x \in V_{\mathbb{R}}^* \,/\, x(\alpha_i) > 0 \,(\forall\, i \in I_{\mathrm{re}}\backslash J)$ et $x(\alpha_i) = 0 \,(\forall\, i \in J)\}$.

3. Nous nous permettons de noter $\ker\alpha$ le sous-espace de $V_{\mathbb{R}}^*$ formé des éléments qui s'annulent en α.

Lemme 7.1.

a) *Le système de racines Ω est de type fini.*

b) *Le sous-espace $\cap_{\alpha\in\Omega} \ker\alpha$ de $V_{\mathbb{R}}^*$ est engendré par son intersection avec le cône de Tits ouvert.*

Démonstration. a) Pour la première assertion, raisonnons par l'absurde. Si Ω n'est pas de type fini, alors il contient au moins une racine imaginaire positive (notée ici α). Par hypothèse, Γ_0 stabilise Δ_+^{im} donc si $\gamma \in \Gamma_0$, alors $\gamma.\alpha$ est une racine imaginaire positive et $\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma^*\alpha = 0$ conduit à une contradiction avec l'hypothèse (BN).

b) Fixons Π_Ω une base de Ω; ce système étant de type fini, c'est aussi une base du sous-espace vectoriel engendré par Ω. Le sous-groupe $W_\Omega = \langle r_\alpha\,;\, \alpha \in \Omega\rangle$ du groupe de Weyl W est fini.

Soit (v_δ) une base de $V_{\mathbb{R}}^*$ située dans la chambre fondamentale ouverte (une telle base existe d'après (T)). L'opérateur $(1/|W_\Omega|)\sum_{w\in W_\Omega} w$ est la projection W_Ω-équivariante de $V_{\mathbb{R}}^*$ sur les points de cet espace qui sont fixes sous l'action de W_Ω c'est-à-dire sur $\cap_{\alpha\in\Omega}\ker\alpha$. Il envoie la base (v_δ) sur un système générateur de ce sous-espace. Or, par convexité du cône de Tits (et stabilité sous l'action de W), pour tout δ, l'image $(1/|W_\Omega|)\sum_{w\in W_\Omega} w.v_\delta$ de v_δ est dans le cône de Tits ouvert. □

Lemme 7.2. *Il existe une partie I_0 de I de type fini et un élément w du groupe de Weyl tels que :*

$$\Omega = w.\Delta(I_0).$$

Démonstration. Par définition de Ω, on a $\Omega = \mathbb{Q}\Omega \cap \Delta$ et donc $\Omega = \{\beta \in \Delta \,/\, \cap_{\alpha\in\Omega} \ker\alpha \subset \ker\beta\}$. D'après le lemme précédent $\cap_{\alpha\in\Omega}\ker\alpha$ rencontre le cône de Tits ouvert. Or, (cf [Ba; 4.4.9]) on sait que $\mathfrak{T}^\circ = \cup_{w\in W} \cup_{J\subset I; J \text{de type fini}} w.C_J$. Par suite, il existe $w \in W$ et $J \subset I$ de type fini tels que $w.C_J$ rencontre $\cap_{\alpha\in\Omega}\ker\alpha$.

Considérons alors une facette $w.C_{I_0}$ dont l'intersection avec $\cap_{\alpha\in\Omega}\ker\alpha$ engendre un sous-espace de codimension minimale. Supposons cette codimension non nulle et notons $(b_i)_{i\in J} \subset w.C_{I_0}$ une base du sous-espace engendré par cette intersection. Comme $(b_i)_{i\in J}$ n'engendre pas $\cap_{\alpha\in\Omega}\ker\alpha$, il existe au moins un élément u du cône de Tits ouvert tel que $(b_i)_{i\in J} \cup \{u\}$ soit une partie libre de $\cap_{\alpha\in\Omega}\ker\alpha$. D'après [Ba; 4.4.13], il existe ε' tel que pour tous les indices $i \in J$ et tout réel $0 < t < \varepsilon'$, les éléments $b_i + tu$ appartiennent à une même facette de $\mathfrak{T}^\circ \cap (\cap_{\alpha\in\Omega}\ker\alpha)$. Ceci contredit la minimalité de la codimension de $w.C_{I_0}$.

Par suite $w.C_{I_0} \cap (\cap_{\alpha\in\Omega}\ker\alpha)$ engendre $\cap_{\alpha\in\Omega}\ker\alpha$, il est clair alors que $\Omega = w.\Delta(I_0)$ ([Ba; 4.4.6]). ∎

Ainsi, quitte à changer de base du système de racines Δ, nous pouvons supposer dans la suite que $\Omega = \Delta(I_0)$ où I_0 est une partie de type fini de I.

7.3 Type du groupe Γ_0. Soit $\gamma \in \Gamma_0$, par stabilité du cône de Tits ouvert, l'image $\gamma.\bar{C}$ de la chambre fondamentale fermée est une chambre qui contient la facette de type fini C_{I_0}. Dans ce cas, il existe un unique élément w_γ du groupe de Weyl, situé dans $W(I_0)$ tel que : $\gamma.\bar{C} = w_\gamma.\bar{C}$. On définit alors, à partir de γ, un k-semi-automorphisme de diagramme de $\mathfrak{h}$ compatible à A en posant $\gamma_d = w_\gamma^{-1}\gamma$ (où γ désigne encore la restriction de γ à $\mathfrak{h}$).

Notons que l'ensemble $\Gamma_d = \{\gamma_d\,;\gamma \in \Gamma_0\}$ est un groupe de k-semi-automorphismes de $\mathfrak{h}$ car Γ_0 normalise $W(I_0)$, ainsi peut-on encore définir l'action étoile de Γ_d; et l'on a $\gamma_d^* = w_\gamma^{-1}\gamma^*$ pour tout γ dans Γ. La forme bilinéaire construite comme en 4.1 est évidemment invariante sous l'action de Γ_d.

Définition. Sous les hypothèses précédentes, le groupe Γ_0 est dit *de type* (I_0, Γ_d).

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

Le système de racines restreintes

Il est clair que le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de la sous-algèbre $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ est stable sous l'action du groupe Γ_0. Or, ce centralisateur $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$ est en fait une sous-algèbre réductive de dimension finie et l'on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}) = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha\in\Delta(I_0)}\mathfrak{g}_\alpha)$. Par suite, l'action de Γ_0 sur $[\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}), \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})]$ s'identifie à un sous-groupe fini du groupe des semi-automorphismes d'une algèbre semi-simple. De plus, pour toute racine simple α_i où $i \in I_0$, on a $\alpha_{i|\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}} = 0$, c'est-à-dire que la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}), \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})]$ de $[\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}), \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})]$ n'a pas de point fixe sous l'action étoile de Γ_0.

Reprenons alors la définition de $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{h}^{\Gamma_0{}^*} \subset \cap_{\Delta(I_0)} \ker\alpha$ (où $\ker\alpha$ est le noyau de la forme α dans $\mathfrak{h}$). Ainsi, le groupe $W(I_0)$ agit-il trivialement sur $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ qui est donc entièrement déterminée par le type de Γ_0 puisqu'on a :

$$\mathfrak{s}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{h}^{\Gamma_d{}^*} \cap (\cap_{\Delta(I_0)} \ker\alpha).$$

Comme au § 4, on note $\bar{\alpha} = (1/|\Gamma_d|)\sum_{\Gamma_d}\gamma^*\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$ et $\mathfrak{t}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{h}^{\Gamma_d^*}$.

Enfin pour tout $\alpha \in \Delta$, on définit :

$$\alpha' = (1/|W(I_0)|)\sum_{w\in W(I_0)} w.\bar{\alpha} = (1/(|W(I_0)||\Gamma_d|))\sum_{\gamma\in\Gamma_d}\sum_{w\in W(I_0)}\gamma^*\circ w.\alpha.$$

Il est clair alors que (pour α, β situées dans $\Delta \cup \{0\}$) :

$$\alpha' = \beta' \Longleftrightarrow \alpha_{|\mathfrak{s}} = \beta_{|\mathfrak{s}}$$

puisque l'on a : $\bar{\alpha} = \bar{\beta} \Longleftrightarrow \alpha_{|\mathfrak{t}} = \beta_{|\mathfrak{t}}$ et $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{K}} \cap (\cap_{i\in I_0}\ker\alpha_i) = (\mathfrak{t}_{\mathbb{K}})^{W(I_0)}$.

Remarque. Pour toute racine α, on a $\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma.\alpha = |\Gamma_0|\alpha'$. En effet $\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma.\alpha$ est fixe sous l'action de Γ_0 et de $W(I_0)$ (car caractérisée par sa restriction à $\mathfrak{s}$: lemme 4.2), donc sous celle de Γ_d; de plus, le sous-groupe $W(I_0)$ est normalisé par Γ_0 et Γ_d, on a ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma.\alpha &= (1/(|W(I_0)|.|\Gamma_d|))\sum_{\gamma'\in\Gamma_d}\sum_{w\in W(I_0)}\sum_{\gamma\in\Gamma_0}(\gamma'\circ w\circ\gamma).\alpha \\
&= (1/(|W(I_0)|.|\Gamma_d|))\sum_{\gamma'\in\Gamma_d}\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma'\circ\gamma(\sum_{w\in W(I_0)} w.\alpha) \\
&= (1/(|W(I_0)|.|\Gamma_d|))\sum_{\gamma'\in\Gamma_d}\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma'\circ w_\gamma\circ\gamma_d(\sum_{w\in W(I_0)} w.\alpha)
\end{aligned}$$

$$= (1/(|W(I_0)|.|\Gamma_d|)) \sum_{\gamma'\in\Gamma_d}\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma'\circ\gamma_d(\sum_{w\in W(I_0)} w.\alpha)$$
$$= (|\Gamma_0|/(|W(I_0)|.|\Gamma_d|)) \sum_{\gamma'\in\Gamma_d} \gamma'(\sum_{w\in W(I_0)} w.\alpha) = |\Gamma_0|\alpha'.$$

Le *système des racines restreintes à* $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ (ou encore à $\mathfrak{s}$) : $\{\alpha_{|\mathfrak{s}}; \alpha\in\Delta, \alpha_{|\mathfrak{s}}\neq 0\}$ peut donc être étudié comme l'ensemble :

$$\Delta' = \{\alpha' \,/\, \alpha\in\Delta \ \text{ tel que } \ \alpha'\neq 0\}.$$

La décomposition de $\mathfrak{g}$ sous l'action de $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ s'écrit : $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}) \oplus (\oplus_{\alpha'\in\Delta'}\mathfrak{g}_{\alpha'})$ où :
$\mathfrak{g}_{\alpha'} = \{X\in\mathfrak{g}; [H,X] = \alpha'(H)X \ (\forall H\in\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})\} = \oplus_{\{\alpha\in\Delta\,;\,\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma(\alpha)=|\Gamma|\alpha'\}}\mathfrak{g}_\alpha$.

La forme bilinéaire $(.,.)$ est encore graduée par rapport à cette décomposition; en particulier, si $\alpha'\in\Delta'$, les sous-espaces $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha'}$ sont duaux.

Comme Γ_d est un groupe de semi-automorphismes de diagramme de $\mathfrak{h}$, nous reprenons les notations introduites aux § 4 et § 5 en remplaçant Γ par Γ_d. Notons que la forme bilinéaire $(.,.)$ est également invariante sous l'action de Γ_d.

7.4 *Pour pouvoir à présent énoncer les restrictions nécessaires concernant la matrice A et l'action de Γ pour que le système de racines restreint relève de la théorie de* [Ba]*, nous considérons alors le système de racines obtenu par passage au quotient par Γ_d et que nous notons $\bar\Delta$.*

On note $\bar\imath$ l'orbite de i sous l'action de Γ_d et $\bar I$ (resp. $\bar I_0$) l'ensemble des $\bar\imath$ pour $i\in I$ (resp. $i\in I_0$) et $\bar\alpha_{\bar\imath} = (1/|\Gamma_d|)\sum_{\gamma\in\Gamma_d}\gamma^*\alpha_i$. On peut alors, comme dans [Ba], considérer le diagramme de Dynkin associé à $\bar I$ et à la matrice $\left(\langle\bar\alpha_{\bar\imath}, \bar\alpha_{\bar\jmath}\check{}\rangle\right)_{(\bar\imath,\bar\jmath)\in\bar I^2}$.

Si $\bar\imath\in\bar I\backslash\bar I_0$, on note $\bar F(\bar\imath)$ la composante connexe de $\{\bar\imath\}\cup\bar I_0$ contenant i.

Hypothèses supplémentaires. Lorsque $\bar F(\bar\imath)$ est de type fini (c'est-à-dire $\Gamma i\cup I_0$ de type fini, éventuellement décomposable), supposons :

(D) la plus grande racine positive de $\widetilde\Delta(A(\bar F(\bar\imath)))$ (en bijection avec $\Delta(A(\bar F(\bar\imath)))$) admet une coordonnée suivant $\bar\alpha_{\bar\imath}$, inférieure ou égale à deux;

(E) si $\bar{F}(\bar{\imath})$ est de type fini alors $\bar{\imath}$ est stable par l'automorphisme de diagramme dit d'opposition de $\bar{F}(\bar{\imath})$ c'est-à-dire:

- si $\bar{F}(\bar{\imath})$ est de type A_n, alors n est impair et $\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ est la racine médiane;
- si $\bar{F}(\bar{\imath}) = D_{2n+1}$, alors $\bar{\imath} \notin \{2n, 2n+1\}$;
- si $\bar{F}(\bar{\imath}) = E_6$, alors $\bar{\imath} \in \{2, 4\}$ (avec la numérotation usuelle cf. [Bbki, Lie]); la condition (D) impose alors $\bar{\imath} = 2$.

Lorsque $\mathbb{K}$ n'est pas un corps ordonné et que la définition de S.G.R. choisie (cf. n° 7 du § 1) est basée sur l'axiome (B3), nous devons en plus supposer que pour tout $i \in I^1_{\text{re}}$, sont exclus les cas suivants pour $F(i)$ et i :
B_n avec $i \geq 3$ et i impair,
D_n pour $3 \leq i \leq n-2$ et i impair,
E_7 si $i = 2$.

Ces hypothèses techniques permettent de démontrer que le système de racines restreintes Δ' relève encore de l'axiomatisation précédente (cf. [Ba] "quotient par une partie de type fini"). Ce passage au quotient (qui correspond à l'étude des formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody, cf. [B$_3$R]) est étudié dans [Ba]. D'après [Ba; 6.2.14], il existe un S.G.R. dont :
- la base est située dans $\bar{\Delta}_+$,
- le système de racines est exactement Δ'.
Encore une fois, l'hypothèse (BN) imposée précédemment passe au quotient.

Le groupe de Weyl restreint correspondant est engendré par les éléments de plus grandes longueurs des sous-groupes $W(\Gamma i \cup I_0)$ pour les indices i tels que $\Gamma i \cup I_0$ soit de type fini. Les racines relatives simples réelles étant les racines α'_i pour ces mêmes indices.

Lemme 7.5. *Pour toute racine restreinte α', l'élément $\nu^{-1}(\alpha')$ est une coracine* (*au sens de* [BP]) *à constante strictement positive près.*

Démonstration. Si $\alpha' \in \Delta'^{\text{re}}$, elle est conjuguée, sous l'action du groupe de Weyl restreint, à une racine restreinte simple α'_i réelle pour laquelle, par définition, la coracine est la somme des éléments de l'orbite de $\bar{\alpha}\,\hat{i}$ sous l'action de $W(I_0)$. Par invariance de la forme bilinéaire sous l'action de Γ (sur $\mathfrak{h}$) et celle de $W(I_0)$, la constante de proportionalité entre $\nu^{-1}(\alpha)$ et $\alpha\hat{}$ ne dépend pas de l'élément de l'orbite sous le produit semi-direct de Γ

et $W(I_0)$, ce qui établit le résultat (puisque les points fixes dans $\mathfrak{h}^{\Gamma_d}$ sous l'action de ces deux groupes coïncident).

Grâce à l'action du groupe de Weyl restreint, on peut, pour les racines imaginaires, ne considérer que le cas des racines négatives contre toutes les coracines $\alpha'\,\hat{_i}$. Il suffit alors de démontrer que $\langle \alpha'_i, \nu^{-1}(\alpha')\,\rangle$ est du même signe que $\langle \alpha', \alpha'\,\hat{_i}\,\rangle$. Mais ceci est clair puisque $\langle \alpha', \alpha'\,\hat{_i}\,\rangle$ vaut $(\nu^{-1}(\alpha'), \alpha'\,\hat{_i})$ c'est-à-dire, à une constante strictement positive près, $\langle \alpha'_i, \nu^{-1}(\alpha')\,\rangle$. $\square$

LEMME 7.6. *Soit α' une racine restreinte. Si $X \in \mathfrak{g}_{\alpha'}$ et $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha'}$ sont tels que $(X, Y) \in k \setminus \{0\}$, alors $\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma([X, Y]) \neq 0$ (donc $[X, Y] \neq 0$). De plus, $\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma([X, Y]) = |\Gamma_0|.(X, Y).\nu^{-1}(\alpha') + u + v$ avec $u \in \sum_\alpha(\mathbb{K} - k)\nu^{-1}(\alpha)$ (où α parcourt $\{\alpha \in \Delta \,/\, \sum_{\Gamma_0} \gamma.\alpha = |\Gamma_0|\alpha'\}$) et $v \in \oplus_{\alpha\in\Delta(I_0)}\mathfrak{g}_\alpha$ (où comme dans la démonstration du lemme 4.4, on note $\mathbb{K} - k$ le noyau de la trace de $\mathbb{K}$ dans k).*

Démonstration. Calculons le crochet de ces deux éléments.
Dans $\mathfrak{g}$, vue comme algèbre graduée par $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}$, on a : $X = \sum X_{\tilde\alpha}$ et $Y = \sum Y_{\tilde\alpha}$ où $\widetilde{\alpha}$ parcourt l'ensemble des racines du système à base libre telles que $\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma(\psi(\widetilde{\alpha})) = |\Gamma_0|\alpha'$. Soient $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ deux racines distinctes, intervenant dans la décomposition précédente; si leur différence est une racine, celle-ci est située dans l'ensemble $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}(I_0) \cap \widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}(I_0)$. Par suite $[X, Y] = \sum[X_{\tilde\alpha}, Y_{\tilde\alpha}] + v'$ où $v' \in \oplus_{\alpha\in\Delta(I_0)}\mathfrak{g}_\alpha$, soit encore $[X, Y] = \sum(X_{\tilde\alpha}, Y_{\tilde\alpha})\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})) + v'$. D'autre part, $(X, Y) = \sum(X_{\tilde\alpha}, Y_{\tilde\alpha})$.

Comme $\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma(\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))) = \nu^{-1}(\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma.\psi(\widetilde{\alpha})) = |\Gamma_0|\nu^{-1}(\alpha')$, en réutilisant les notations et calculs de 4.4, on voit qu'il existe $u \in \sum(\mathbb{K} - k)\nu^{-1}(\alpha)$ et $v \in \oplus_{\alpha\in\Delta(I_0)}\mathfrak{g}_\alpha$ tels que $\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma([X, Y]) = |\Gamma_0|(X, Y)\nu^{-1}(\alpha') + u + v$; la non nullité de $\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma([X, Y])$ se démontre alors, en utilisant la condition (C), par le même argument qu'en 4.4. $\square$

EXEMPLE 7.7. **Le cas des formes presque-déployées d'algèbres de Kac-Moody.**

Supposons que $[\mathbb{K}; k]$ soit une extension de corps de degré fini (toujours en caractéristique nulle). Soit $\mathfrak{g}_k$ une k-forme presque-déployée de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ l'algèbre de Kac-Moody sur $\mathbb{K}$ associée à une matrice A de Kac-Moody (i.e. de Cartan généralisée) et à une réalisation (vérifiant les hypothèses du paragraphe 1). On fixe l'isomorphisme tel que $\mathfrak{g} \approx \mathfrak{g}_k \otimes_k \mathbb{K}$ et l'on considère alors l'action de $\Gamma_0 = \mathrm{Gal}([\mathbb{K}; k])$ sur $\mathfrak{g}$ pour laquelle $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}^{\Gamma_0}$. On sait qu'il existe alors une sous-algèbre parabolique positive $\mathfrak{P}_{\mathbb{K}}$ définie sur k (i.e.

stable sous l'action de Γ_0) et contenant une SATDM (i.e. une sous-algèbre torique déployée maximale) $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ qui de plus est de type fini.

Fixons alors $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ définie sur k telle que $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{P}_{\mathbb{K}}$ ainsi qu'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ vérifiant $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{P}_{\mathbb{K}}$, alors $\mathfrak{P}_{\mathbb{K}}$ s'écrit $\mathfrak{P}(I_0)$ (où I_0 est donc de type fini).

Pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, il existe alors $w_\gamma \in W(I_0)$ tel que $w_\gamma^{-1}\gamma$ stabilise le Borel standard positif $\mathfrak{b}$ et donc les quatre algèbres $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{P}_{\mathbb{K}}$.

Par suite $\gamma_d = w_\gamma^{-1}\gamma$ agit comme un semi-automorphisme de diagramme (sur $\mathfrak{h}$) et Γ_0 agit sur $\mathfrak{g}$ comme un groupe fini de semi-automorphismes de type (I_0, Γ_d).

§8. Sous-algèbres Γ_0-régulières

Par analogie avec ce qui a été fait avant, l'idée est à présent de considérer une k-sous-algèbre $\mathfrak{L}$ stable sous l'action de Γ_0 ainsi que sous l'action adjointe de $\mathfrak{s}$ et sur laquelle la restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{L}$ est à valeurs dans k et est non dégénérée pour essayer de démontrer que son système de racines par rapport à $\mathfrak{s}$ est un sous-système de Δ'

Hélas de nouvelles hypothèses sur la réalisation (“ $\mathfrak{h}$ de dimension finie”) et sur la $\mathbb{K}$-sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{L}$ seront nécessaires.

Nous supposons dorénavant que $\mathfrak{h}$ est de dimension finie.

Définition. Une k-sous-algèbre $\mathfrak{L}$ est Γ_0-*régulière* si elle est stable sous l'action de Γ_0 ainsi que sous l'action adjointe de $\mathfrak{s}$; elle est Γ_0-*birégulière* si, de plus, la restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{L}$ est à valeurs dans k et est non dégénérée.

Soit $\mathfrak{L}$ une k-sous-algèbre Γ_0-birégulière, notons alors $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ la $\mathbb{K}$-sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{L}$. Comme au §5, nous avons $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{L} \otimes_k \mathbb{K}$ ainsi que les deux décompositions analogues de $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$:

$$\mathfrak{L} = (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})) \oplus (\oplus_{\alpha' \in \Omega'} \mathfrak{L}_{\alpha'}) \text{ où } \mathfrak{L}_{\alpha'} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{g}_{\alpha'}$$

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} = (\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})) \oplus (\oplus_{\alpha' \in \Omega'} \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}) \text{ où } \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'} = \mathfrak{L}_{\mathbb{K}}, \cap \mathfrak{g}_{\alpha'} = \mathfrak{L}_{\alpha'} \otimes_k \mathbb{K}$$

où l'on note $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$ le centralisateur de $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ et $\Omega' = \{\alpha' \in \Delta' \,;\, \mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{g}_{\alpha'} \neq \{0\}\}$ le système de racines restreintes de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ par rapport à $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ (identifié au système formé de leurs restrictions à $\mathfrak{s}$).

Lemme 8.1. *La sous-algèbre $\mathfrak{M} = (\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})) + \mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ est réductive.*

N.B.: Plus précisément, nous pouvons dire qu'elle est réductive dans $\mathfrak{g}$ car, de plus, son centre est formé d'éléments semi-simples dans $\mathfrak{g}$ (il est contenu dans $\mathfrak{h}$ sous l'hypothèse 1) ci-dessous).

Démonstration. La forme bilinéaire est invariante et non dégénérée sur $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ et $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$, donc aussi sur $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} + \mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$ et $\mathfrak{M} = (\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} + \mathfrak{s}_{\mathbb{K}}) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$. L'algèbre $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$ est somme directe orthogonale de son centre $\mathfrak{z}$ (avec $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}} \subset \mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}$) et de son algèbre dérivée $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})'$ semi-simple de système de racines $\Delta(I_0)$. Notons $\mathfrak{M}_1 = (\mathfrak{M} + \mathfrak{z}) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})'$ la projection de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})'$ parallèlement à $\mathfrak{z}$; la forme bilinéaire est non dégénérée sur $\mathfrak{M}_1$. Or sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})'$, cette forme coïncide (à une constante près) avec la forme de Killing donc $\mathfrak{M}_1$ est réductive dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})'$ (cf. [Bbki, Lie]).

Mais, l'action adjointe de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$ se réduit à une action triviale et à l'action adjointe de $\mathfrak{M}_1$ sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})'$ donc $\mathfrak{M}$ est réductive dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$.

Le centre de $\mathfrak{M}$ est contenu dans une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$ qui est conjuguée par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$ (donc de $\mathfrak{g}$) à $\mathfrak{h}$, ainsi le centre de $\mathfrak{M}$ est formé d'éléments semi-simples de $\mathfrak{g}$. □

HYPOTHÈSES SUPPLÉMENTAIRES.

Nous supposons dans la suite que :

1) $\mathfrak{h}_2 := \mathfrak{h} \cap ((\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})) + \mathfrak{s}_{\mathbb{K}}) = (\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} + \mathfrak{s}_{\mathbb{K}}) \cap \mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre $(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})) + \mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$;

2) pour toute racine restreinte réelle $\alpha' \in \Omega'$, il existe un $\mathfrak{sl}_2$-triplet $(X_{\alpha'}, Y_{\alpha'}, [X_{\alpha'}, Y_{\alpha'}])$ situé dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ tel que $[X_{\alpha'}, Y_{\alpha'}] \in \mathbb{Q}_+^* \alpha'^{\vee}$ et $(X_{\alpha'}, Y_{\alpha'})$ est situé dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'} \times \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\alpha'}$, dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},2\alpha'} \times \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-2\alpha'}$ ou encore dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'/2} \times \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\alpha'/2}$.

Remarques. 1. La sous-algèbre $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ se prolonge en une sous-algèbre de Cartan de $(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})) + \mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ qui elle-même se prolonge en une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$. Dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$, la sous-algèbre de Cartan obtenue est bien sûr toujours conjuguée à $\mathfrak{h}$. Quitte à modifier $\mathfrak{h}$ par l'automorphime intérieur de $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$ conjuguant ces deux algèbres, l'hypothèse 1) est vérifiée. Cependant, pour assurer la compatibilité des définitions précédentes (en particulier celles de I_0 et de Γ_d), il est nécessaire que Γ_0 commute à l'automorphisme intérieur de $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})$ conjuguant ces deux sous-algèbres.

2. Dans le cas des formes presque-déployées d'algèbres de Kac-Moody par exemple, la k-sous-algèbre $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})' \cap \mathfrak{g}_k$ est une forme anisotrope de $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})'$ (car $\mathfrak{s}$ est alors une sous-algèbre torique déployée maximale).

La sous-algèbre de Cartan obtenue par prolongement comme dans la remarque 1) doit donc s'obtenir à partir d'une forme compacte (c'est en effet réalisé si l'automorphisme intérieur provient de ceux de $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})' \cap \mathfrak{g}_k$).

3. Nous avons choisi d'imposer ici directement ce choix de la sous-algèbre de Cartan pour simplifier la rédaction mais on peut effectivement généraliser un peu ce résultat grâce à la remarque 1).

Sous les hypothèses de ce paragraphe, nous allons à présent démontrer que Ω' est un sous-système du système de racines restreintes Δ'. La démonstration est beaucoup plus longue que celle faite dans le cas du quotient par un groupe de semi-automorphismes de diagramme même si les premières constatations sont analogues.

Pour toute racine restreinte $\alpha' \in \Omega'$, la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_2$ de $(\mathfrak{L}_{\mathbb{K}} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{s}_{\mathbb{K}})) + \mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ agit diagonalement $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}$ donnant une décomposition du type :

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'} = \oplus_\mu \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\mu) \text{ où } \mu \in (\mathfrak{h}_2)^*.$$

La restriction à $\mathfrak{h}_2$ de la forme bilinéaire étant non dégénérée, on définit un isomorphisme Γ_0-équivariant $\nu_{\mathfrak{L}}$ entre $\mathfrak{h}_2$ et son dual en associant à $h \in \mathfrak{h}_2$ la restriction à $\mathfrak{h}_2$ de $\nu(h)$. On a encore le résultat classique :

Lemme 8.2. *Soient λ et μ deux poids de cette représentation.*

1) *Si $\mu \neq -\lambda$, alors $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\mu)$ et $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\lambda)$ sont orthogonaux.*

2) *La restriction de la forme bilinéaire à $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\mu) \times \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\alpha'}(-\mu)$ est non dégénérée.*

Lemme 8.3. *Soient α', β' deux éléments de Ω' et μ (resp. λ) un poids intervenant dans la décomposition de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}$ (resp. $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\beta'}$) sous l'action de $\mathfrak{h}_2$.*

Soient $X_\mu \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\mu)$ et $Y_\mu \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\alpha'}(-\mu)$ tels que $(X_\mu, Y_\mu) = 1$, on a :

$$[X_\mu, Y_\mu] \in \mathfrak{h}_2 \text{ et } \lambda(\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma.[X_\mu, Y_\mu]) = |\Gamma_0|\beta'(\nu^{-1}(\alpha')).$$

N.B.: Ce résultat est à mettre en parallèle avec celui de 5.2, il est hélas nettement moins fort mais permet cependant d'affimer que :$\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma.[X_\mu,Y_\mu]$ agit $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ comme $|\Gamma_0|\nu^{-1}(\alpha')$.

Démonstration. Si $X_\mu \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\mu)$ et $Y_\mu \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\alpha'}(-\mu)$ sont choisis, comme dans l'énoncé, (i.e. $(X_\mu, Y_\mu) = 1$). Dans l'algèbre $\mathfrak{g}$ graduée par $\widetilde{\Delta}$, on a $X_\mu = \sum_{\widetilde{\alpha}} X_{\widetilde{\alpha}}$ et $Y_\mu = \sum_{\widetilde{\alpha}} Y_{\widetilde{\alpha}}$ où $X_{\widetilde{\alpha}} \in \mathfrak{g}_{\widetilde{\alpha}}$, $Y_{\widetilde{\alpha}} \in \mathfrak{g}_{-\widetilde{\alpha}}$ et où les $\psi(\widetilde{\alpha})$ admettent μ pour restriction à $\mathfrak{h}_2$.

Alors, l'élément $[X_\mu, Y_\mu] = \sum_{\widetilde{\alpha}}(X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}})\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})) + \sum_{\widetilde{\alpha}\neq\widetilde{\beta}}[X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\beta}}]$ est contenu dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ et de poids nul sur $\mathfrak{h}_2$, donc appartient à $\mathfrak{h}_2$. De plus, si $\psi(\widetilde{\alpha}) = \psi(\widetilde{\beta})$, alors $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}$ n'est pas une racine (car $0 \notin \psi(\widetilde{\Delta})$). Ainsi, on a $[X_\mu, Y_\mu] = \sum_{\widetilde{\alpha}}(X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}})\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})) \in \mathfrak{h}_2$; et de même $1 = (X_\mu, Y_\mu) = \sum_{\widetilde{\alpha}}(X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}})$.

Considérons le poids λ de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ sous $\mathfrak{h}_2$, alors :

$$\begin{aligned}
\lambda([X_\mu, Y_\mu]) &= \lambda(\sum_{\widetilde{\alpha}}(X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}})\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})))\\
&= (\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), \sum_{\widetilde{\alpha}}(X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}})\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})))\\
&= \sum_{\widetilde{\alpha}}(X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}})(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), \nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})))\\
&= \sum_{\widetilde{\alpha}}(X_{\widetilde{\alpha}}, Y_{\widetilde{\alpha}})\mu(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda)) = \mu(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda)).
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, les éléments $\gamma.X_\mu$ et $\gamma.Y_\mu$ de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\gamma.\mu)$ et $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\alpha'}(-\gamma.\mu)$ vérifient aussi $(\gamma.X_\mu, \gamma.Y_\mu) = 1$, donc on a également : $\lambda(\gamma.[X_\mu, Y_\mu]) = (\gamma.\mu)(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda))$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\lambda(\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma.[X_\mu, Y_\mu]) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_0}(\gamma.\mu)(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda)) = \sum_{\gamma\in\Gamma_0}(\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), \gamma.\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha})))\\
&= (\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), \sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma.\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}))) = (\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), |\Gamma_0|\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\alpha}')))\\
&= (\nu_{\mathfrak{L}}^{-1}(\lambda), |\Gamma_0|\nu^{-1}(\alpha') = |\Gamma_0|\beta'(\nu^{-1}(\alpha')))
\end{aligned}$$

□

Pour démontrer que Ω' est un sous-système de Δ', la difficulté majeure est de prouver l'axiome (SSR2) et nous devons même utiliser un moyen très détourné pour arriver au résultat :

- nous allons démontrer que Ω' est un système de racines associé à un S.G.R. $(\mathfrak{h}\,,\, \mathfrak{h}^*\,,\, \Phi,\, \Phi\hat{}\,,\, (N_{\alpha'})_{\alpha'\in\Phi})$ où Φ est une partie de Ω'_+ que nous décrirons;

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

- nous vérifierons ensuite que les notions de coracines au sens de ce nouveau S.G.R et au sens de Δ' sont compatibles; c'est-à-dire que :

  $\langle \alpha', \beta'^{\hat{}}_{\Omega'} \rangle < 0 \Longleftrightarrow \langle \alpha', \beta'^{\hat{}}_{\Delta'} \rangle < 0$;
- ceci nous permettra enfin de démontrer (SSR2).

Première étape : détermination de Φ et donc du S.G.R.

a) D'après l'hypothèse de non dégénérescence de la forme bilinéaire sur $\mathfrak{L}$, il est clair que si α' appartient à Ω', alors $-\alpha'$ aussi, d'où (SSR1).

b) L'hypothèse d'existence des $\mathfrak{sl}_2$-triplets associés aux racines restreintes réelles de Ω' permet de montrer que Ω' est stable sous l'action des réflexions par rapport aux racines réelles qu'il contient, d'où (SSR3) (on a même l'équivalent de l'axiome (SR3b) pour Ω').

En effet, si α' est réelle et si le $\mathfrak{sl}_2$-triplet associé est situé dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'} \oplus \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\alpha'} \oplus \mathfrak{h}$ ou encore $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'/2} \oplus \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\alpha'/2} \oplus \mathfrak{h}$, c'est évident.

Si α' est une racine réelle pour laquelle le $\mathfrak{sl}_2$-triplet associé est situé dans $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},2\alpha'} \oplus \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-2\alpha'} \oplus \mathfrak{h}$, alors on a seulement, a priori, (pour toute racine $\beta' \in \Omega'$) l'inclusion dans Ω' de la chaîne $\{\beta', \beta' \pm 2\alpha', \ldots, r_{\alpha'}(\beta')\}$. Cependant, l'espace $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}$ se décompose sous l'action de $\mathfrak{h}_2$, soit μ un poids intervenant dans cette décomposition. Soient $X_\mu \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\mu)$ et $Y_\mu \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\alpha'}(-\mu)$ tels que $(X_\mu, Y_\mu) = 1$ et λ un poids de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\beta'}$ sous $\mathfrak{h}_2$, si $r_{\alpha'}(\beta') \neq \beta'$, alors (d'après 8.3) $\lambda(\sum_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma.[X_\mu, Y_\mu]) = |\Gamma_0|\beta'(\nu^{-1}(\alpha')) \neq 0$. Il existe donc $\gamma \in \Gamma_0$ tel que $\lambda(\gamma.[X_\mu, Y_\mu]) \neq 0$. Ceci montre que l'un des deux poids $\lambda+\mu$ ou $\lambda-\mu$ intervient dans la décomposition de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ donc $\beta' \pm \alpha'$ est une racine de Ω', ce qui assure l'inclusion dans Ω' de la chaîne complète entre β' et son image par $r_{\alpha'}$.

Il résulte alors de a) et b) que Ω'^{re} est un système de racines réelles (au sens de [Ba]) dont on peut déterminer une base Φ_{re} située dans $\Omega' \cap \Delta'^{\mathrm{re}}_+$ (cf. remarques p.130 et 5.1.9 de [Ba]).

On construit alors la base Φ comme en 5.1.16 de [Ba] et on la normalise grâce à l'hypothèse (BN) comme en 4.3.8 . Nous nous contentons ici de résumer l'idée de cette construction.

Dans l'ensemble $K(\Phi_{\mathrm{re}}) = \{\alpha' \in \Omega'^{\mathrm{im}} \cap \Delta'_+ \,;\, \langle \alpha', \beta'^{\check{}} \rangle \leq 0 \;\; (\forall\, \beta' \in \Phi_{\mathrm{re}})\}$, on considère, par récurrence sur la hauteur θ, ceux qui sont dans Ψ_n : c'est-à-dire ceux dont la hauteur est dans $[(3/4)n, (3/4)(n+1)[$ et qui ne s'écrivent pas comme une bonne décomposition (i.e. du type $\alpha+\beta$ où $\langle \alpha, \beta^{\check{}} \rangle < 0$) de deux éléments non $\mathbb{Q}$-proportionnels de hauteurs strictement inférieures à $(3/4)n$ et dont l'un est dans $(\cup_{m\leq n-1} \Psi_m) \cup \Phi_{\mathrm{re}}$.

On obtient ainsi $\Psi_\infty = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Psi_n$ et il suffit dans chaque demi-droite rationnelle rencontrant Ψ_∞ de choisir un élément α' tel que $q\alpha' \in \Psi_\infty$ implique $q \geq (3/4)$ (et même $q \geq 1$ si $\mathbb{Q}\alpha' \cap \Psi_\infty$ admet un plus petit élément). La base encore notée Φ considérée est alors la réunion de Φ^{re} et de l'ensemble des racines α' ainsi obtenues et pour chacune d'elles $N_{\alpha'} = \{n \in \mathbb{Q}_+\,;\, n\alpha' \in \Psi_\infty\}$.

Premier résultat :

Ainsi définie, la donnée $(\mathfrak{h}\,,\,\mathfrak{h}^*\,,\,\Phi,\,\Phi\hat{}\,,\,(N_{\alpha'})_{\alpha'\in\Phi})$ détermine bien un S.G.R (les coracines des racines de Φ étant des coracines au sens de Δ' et la matrice associée $B = \Big(\langle\alpha', \beta'\hat{}\,\rangle\Big)_{(\alpha',\beta')\in\Phi^2}$.

Notre but est à présent de montrer que le système de racines de ce S.G.R est Ω'. Nous pouvons d'ores et déjà affirmer que :

1) si α' et β' sont dans Φ, alors $\langle\alpha', \beta'\hat{}\,\rangle \leq 0$;

2) Ω' est inclus dans le système de racines (noté Θ) associé au S.G.R. considéré; en particulier toute racine de Ω'_+ s'écrit comme une somme d'éléments de $\Psi_\infty = \cup_{\alpha'\in\Phi}N_{\alpha'}\alpha'$ dont le support (par rapport à Φ) est connexe.

La première assertion est quasiment évidente :

- si les deux racines sont réelles, elle résulte du choix de Φ_{re} comme base de Ω'^{re};

- si l'une des racines est imaginaire et l'autre réelle, elle est due à l'inclusion de Φ_{im} dans $K(\Phi_{\mathrm{re}})$;

- enfin, cette inégalité est toujours vérifiée si les deux racines sont imaginaires positives.

Pour la seconde assertion, nous allons raisonner par récurrence sur la hauteur $\theta(\alpha')$ (définie dans Δ donc dans Δ') d'un élément quelconque α' de Ω'.

Dans Ω'^{re}, le résultat est connu grâce à sa structure de système de racines réelles.

Si α' est une racine imaginaire de Ω'_+, il existe un élément w du groupe $W_{\Omega'} =< r_{\alpha'}, \alpha' \in \Omega'^{\mathrm{re}} >$ tel que $w.\alpha' \in \Omega'_+$ vérifie $\langle w.\alpha', \beta'\hat{}\,\rangle \leq 0$ pour tout $\beta' \in \Phi$ et de hauteur inférieure ou égale à $\theta(\alpha')$ (considérer un élément de hauteur minimale de $W_{\Omega'}.\alpha'$).

- Si $\theta(w.\alpha') < \theta(\alpha')$ (alors $\theta(w.\alpha') < \theta(\alpha') - 3/4$), le résultat est vrai par hypothèse de récurrence pour $w.\alpha'$ et donc pour α' par (SR3b) dans Θ.

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

- Si $\theta(w.\alpha') = \theta(\alpha')$, alors $\alpha' \in K(\Phi^{\mathrm{re}})$ a été pris en compte lors de la construction de Ψ_∞.

Si $\alpha' \in \Psi_\infty$, le résultat est clair. Sinon, il existe $\eta \in \Psi_\infty$ tel que $\alpha' - \eta$ appartienne à Ω_+ et tel que $\langle \alpha', \eta\check{}\rangle < 0$. Comme $\theta(\alpha' - \eta)$ est inférieure à $\theta(\alpha') - 3/4$, l'hypothèse de récurrence est vraie pour $\alpha' - \eta$ et (SR2b) dans Θ permet d'affirmer que $\alpha' \in \Theta$.

Deuxième étape : *montrons que* Ω' *est le système de racines correspondant à ce S.G.R.*

Nous venons de montrer l'inclusion de Ω' dans Θ (le système de racines associé au S.G.R. considéré). Reste à établir l'inclusion inverse.

Rappelons que (SSR1) et (SSR3) sont évidents pour Ω'. Si l'on suppose $\Theta \not\subset \Omega'$, il existe donc $\zeta' \in \Theta_+$ de hauteur minimale parmi les racines positives de Θ qui n'appartiennent pas à Ω'. Il est clair que $\zeta' \in K(\Phi) \setminus \Psi_\infty$ et l'on sait que :

$\exists\, \beta' \in \Phi\,,\ \exists\, n_{\beta'} \in N_{\beta'}\,,$ tels que $\zeta' - n_{\beta'}\beta' \in \Theta_+$ et $\langle \zeta' - n_{\beta'}\beta', \beta'\check{}\rangle < 0$.
(On raisonne dans un revêtement avec (SR5) et on redescend.)

Par hypothèse de minimalité, la racine $\zeta' - n_{\beta'}\beta'$ est aussi dans Ω'.

Posons $\alpha' = \zeta' - n_{\beta'}\beta'$ et $\delta' = n_{\beta'}\beta'$, δ' est donc dans Ψ_∞.

Nous allons montrer que, comme $\langle \alpha', \delta'\check{}\rangle < 0$, nous avons forcément $\zeta' = \alpha' + \delta' \in \Omega'$ d'où une contradiction, hélas, ceci va nécessiter une étude assez longue est précise des poids intervenant dans la décomposition de $\mathfrak{L}$ sous l'action de $\mathfrak{h}_2$.

Si l'une des racines α' ou δ' est réelle, on a le résultat car $\langle \alpha', \delta'\check{}\rangle < 0$ implique $\langle \delta', \alpha'\check{}\rangle < 0$ (et l'on a la condition de chaîne pour les racines réelles); on peut donc supposer ces racines imaginaires.

Remarque préliminaire. Nous avons démontré l'inclusion de Ω' dans Θ, cependant ayant construit l'ensemble Ψ_∞ à partir de Ω' et non de Θ nous ne pouvons pas affirmer que le S.G.R. considéré est normalisé. Cependant, par minimalité de ζ' et par construction de Ψ_∞, nous pouvons dire que dans Θ :

"la condition (SGRN) est vérifiée par les racines dont la hauteur est inférieure à celle de ζ'".

Ici, $\zeta' - \delta' \in \Theta_+$, donc δ' est de hauteur est inférieure à celle de ζ' et ne saurait admettre une bonne décomposition à support connexe non réduit à un point.

LEMME 8.4. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un entier positif n minimal tel que* : $(\mathrm{ad}\ \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^{n+1}\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'} = \{0\}$, *on a alors* $\alpha' - n\delta' \in \Omega'_+$ *et donc* $\langle \alpha' - n\delta', \delta'\hat{}\,\rangle \leq 0$.

Remarque. L'existence de cet entier n est primordiale dans la suite de la démonstration. Cela explique en particulier l'interêt de considérer $\beta' \in \Phi$ plutôt que d'essayer de démontrer directement l'axiome (SSR2) pour Ω'.

Démonstration. D'après (BN), pour l entier assez grand $\alpha' - l\delta' \notin \sum_i \mathbb{Q}_+\alpha'_i$. Par suite, il existe un entier m tel que $\alpha' - m\delta' \in \sum_i \mathbb{Q}_+\alpha'_i$ et $\alpha' - (m+1)\delta' \notin \sum_i \mathbb{Q}_+\alpha'_i$. Montrons que $(\mathrm{ad}\ \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^{m+1}\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'} = \{0\}$, ce qui établira le lemme.

Si au contraire $(\mathrm{ad}\ \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^{m+1}\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'} \neq \{0\}$, alors $\alpha' - (m+1)\delta' \in \Omega'_-$ et $\alpha' - m\delta' \in \Omega'_+$. L'égalité $\delta' = (-\alpha' + (m+1)\delta') + (\alpha' - m\delta')$ montre que δ' s'écrit comme la somme de deux racines de Ω'_+ non $\mathbb{Q}$-proportionnelles (qui, d'après la première étape s'écrivent comme de "bonnes décompositions" des éléments de Φ). D'après la remarque préliminaire, ceci ne doit pas permettre d'obtenir une décomposition à support connexe de δ' par rapport aux éléments de Φ car $\delta' \in \Psi_\infty$), donc $\langle(-\alpha'+(m+1)\delta'), (\alpha'-m\delta')\hat{}\,\rangle$ (ou encore $\langle(\alpha' - m\delta'), (-\alpha' + (m+1)\delta')\hat{}\,\rangle$) est nul.

Ceci nous donne :

$\langle(-\alpha' + m\delta'), (\alpha' - m\delta')\hat{}\,\rangle + \langle\delta', (\alpha' - m\delta')\hat{}\,\rangle = 0$ et

$\langle(\alpha' - (m+1)\delta'), (-\alpha' + (m+1)\delta')\hat{}\,\rangle + \langle\delta', (-\alpha' + (m+1)\delta')\hat{}\,\rangle = 0$.

La racine imaginaire δ' étant dans Ψ_∞ les scalaires $\langle\delta', (\alpha' - m\delta')\hat{}\,\rangle$ et $\langle\delta', (-\alpha' + (m+1)\delta')\hat{}\,\rangle$ sont négatifs.

Par suite $\langle(\alpha'-(m+1)\delta'), (-\alpha'+(m+1)\delta')\hat{}\,\rangle$ et $\langle(-\alpha'+m\delta'), (\alpha'-m\delta')\hat{}\,\rangle$ sont positifs, les racines $(m+1)\delta' - \alpha'$ et $\alpha' - m\delta'$ sont donc imaginaires (positives).

Dans Δ', la racine $\alpha' - m\delta'$ est conjuguée sous l'action d'un élément w' du groupe de Weyl restreint à une racine γ' située dans $K(\Pi')$ (i.e. telle que $\langle\gamma', \alpha'_i\hat{}\,\rangle \leq 0$ pour tout α'_i). Alors, les supports des racines γ' et $\eta' = w'((m+1)\delta' - \alpha')$ sont disjoints et non liés. Plus précisément, les supports dans I de deux racines $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\eta}$ de $\widetilde{\Delta}$ (telles que la restriction à $\mathfrak{s}$ de $\psi(\widetilde{\gamma})$ soit γ' et celle de $\psi(\widetilde{\eta})$, η') sont disjoints et non liés; donc, les sous-espaces $\mathfrak{g}_{\widetilde{\gamma}}$ et $\mathfrak{g}_{\widetilde{\eta}}$ commutent (pour tout choix de $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\eta}$) et il en est de même des sous-espaces $\mathfrak{g}_{\gamma'}$ et $\mathfrak{g}_{\eta'}$.

Donc, pour toute racine γ (induisant $\gamma' = w'(\alpha' - m\delta')$) et toute racine δ (induisant $w'.\delta'$), si $X_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma$ et $Y_\delta \in \mathfrak{g}_{-\delta}$, on a $[Y_\delta, X_\gamma] = 0$ puisque sinon, on obtient une bonne décomposition de la racine $\delta - \gamma$ (induisant $w'((m+1)\delta' - \alpha')$ ayant son support lié à celui de γ.

Par conjugaison sous l'action du groupe de Weyl restreint (cf. hypothèse d'existence des $\mathfrak{sl}_2$-triplets), on contredit notre hypothèse $(\mathrm{ad}\ \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^{m+1}\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'} \neq \{0\}$. □

Fixons alors l'entier n comme dans le lemme précédent. Il existe n poids $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dans la décomposition de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\delta'}$ sous l'action de $\mathfrak{h}_2$ et un poids ν de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}$ tels que :
$(\mathrm{ad}\ \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'}(-\mu_n) \ldots \mathrm{ad}\ \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'}(-\mu_1))\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\nu) \neq \{0\}$.

Comme au lemme 4.4, notons $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_q$ une base de l'extension $[\mathbb{K}; k]$ pour laquelle $\eta_0 = 1 \in k$ et $\sum_{j=1}^{j=q} k\,\eta_j$ est stable sous $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}, k)$ (cet espace est le noyau de la trace). De plus, choisissons dans k un $\mathbb{Q}$-supplémentaire de $\mathbb{Q}\eta_0$ que nous notons $k - \mathbb{Q}$, Le $\mathbb{Q}$-sous-espace $(k - \mathbb{Q}) \oplus \sum_{j=1}^{j=q} k\,\eta_j$ est un $\mathbb{Q}$-supplémentaire de $\mathbb{Q}\eta_0$ stable sous $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}, k)$.

Nous appelons *partie rationnelle* d'un scalaire sa projection suivant $\mathbb{Q}\eta_0$ dans la décomposition de $\mathbb{K}$ ainsi obtenue.

Pour tout poids μ intervenant dans la décomposition de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\delta'}$, on note (X_μ, Y_μ) un couple de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\delta'}(\mu) \times \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'}(-\mu)$ tel que $(X_\mu, Y_\mu) = 1$, d'après le lemme 8.3, pour tout poids η de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'-n\delta'}$, on a $\eta(\sum_{\Gamma_0} \gamma.[X_\mu, Y_\mu]) = |\Gamma_0|(\alpha' - n\delta')(\nu^{-1}(\delta'))$ enfin, si $X_\eta \in \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'-n\delta'}(\eta)$, on sait que $[Y_\mu, X_\eta] = 0$.

Fixons μ un poids quelconque de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\delta'}$.

Lemme 8.5. *On a* $e = \mu([X_\mu, Y_\mu]) \neq 0$.

Démonstration. Supposons au contraire le scalaire $e = \mu([X_\mu, Y_\mu])$ nul, deux cas sont à étudier suivant la valeur de $\langle \alpha' - n\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle$.

a) Supposons $\langle \alpha' - n\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle$ strictement négatif, alors (pour tout poids η de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'-n\delta'}$), il existe $\gamma \in \Gamma_0$ tel que la partie rationnelle de $\eta(\gamma.[X_\mu, Y_\mu])$ soit strictement négative.

Sur le module U engendré par X_η sous l'action de $\mathbb{K}\gamma.X_\mu \oplus \mathbb{K}\gamma.Y_\mu \oplus \mathbb{K}\gamma.[X_\mu, Y_\mu]$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}(\gamma.[X_\mu, Y_\mu])$ agit par multiplication par $\eta(\gamma.[X_\mu, Y_\mu])$.

Si, pour un certain $m \in \mathbb{N}$, la racine $\alpha' + m\delta'$ n'est pas dans Ω', le module U est de dimension finie et la trace de $\mathrm{ad}(\gamma.[X_\mu, Y_\mu])$ sur U est alors $(\dim U)\eta(\gamma.[X_\mu, Y_\mu]) \neq 0$; ce qui est évidemment absurde. Ainsi, un tel entier m ne peut exister et donc $\alpha' + \delta' \in \Omega'$.

b) Supposons $\langle \alpha' - n\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle = 0$ (on a donc $n \geq 1$).

En ramenant δ' dans $K(\Pi')$ (i.e. tel que pour tout $\alpha' \in \Pi'_{\mathrm{re}}$, on a $\langle \delta', \alpha'\check{}\rangle \leq 0$), on sait d'après [Ba] et l'étude des supports que seuls les cas suivants sont a priori possibles :

1) $\alpha' - n\delta'$ et δ' sont affines et $\mathbb{Q}_+$-proportionnelles; ce qui est en fait impossible puisque $\alpha' \notin \mathbb{Q}_+\delta'$.

2) $\alpha' - n\delta'$ est réelle. Alors, d'après (SR3b), la racine $r_{\alpha'-n\delta'}(\alpha' - (n-1)\delta') = -\alpha' + (n+1)\delta'$ est dans Ω' et δ' s'écrit comme la somme des deux racines $\alpha' - n\delta'$ et $-\alpha' + (n+1)\delta'$.

Rappelons que $\delta' \in N_{\beta'}\beta'$ et donc :

- si $-\alpha' + (n+1)\delta' \in \Omega'_+$, par construction de Ψ_∞, on a $\langle \alpha' - n\delta', (-\alpha' + (n+1)\delta')\check{}\rangle = 0$; par suite $\langle \alpha' - n\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle$ est strictement positif, d'où une contradiction.

- si $-\alpha' + (n+1)\delta' \in \Omega'_-$, alors il s'agit d'une racine réelle et $\langle -\alpha' + (n+1)\delta', (\alpha' - n\delta)\check{}\rangle = -2$ donc $\delta' = \alpha' - n\delta' + (-\alpha' + (n+1)\delta')$ est dans la chaîne de direction $\alpha' - n\delta'$ et issue de $-\alpha' + (n+1)\delta'$. La racine δ' est donc dans le système de racines engendré par Ω'^{re}, elle admet donc une bonne décomposition en fonction des racines de Φ_{re}, d'où une contradiction.

3) les supports des conjugués de $\alpha' - n\delta'$ et δ' (ramené dans $K(\Pi')$) sont disjoints et non liés. Alors, n étant non nul, on a $\alpha' - (n-1)\delta' \in \Omega'_+$ et deux cas sont envisageables :

- Soit $\langle \alpha' - (n-1)\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle < 0$, on reprend alors le raisonnement de a) en considérant un poids η dans $(\mathrm{ad}\ \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^{(n-1)}\mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\alpha'}$.

- Soit $\langle \alpha' - (n-1)\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle = 0$, auquel cas, $\langle \delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle = 0$ donc $\langle \alpha', \nu^{-1}(\delta')\rangle = 0$ d'où une contradiction avec notre hypothèse de départ. □

Pour $\gamma \in \Gamma_0$, en posant $X'_{\gamma.\mu} = \gamma.X_\mu$ et $Y'_{\gamma.\mu} = (2/\gamma(e))\gamma.Y_\mu$, alors, au vu du lemme précédent, $(X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}, [X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}])$ est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.

LEMME 8.6. *Sous les hypothèses précédentes, pour tout poids η et tout $\gamma \in \Gamma_0$, on a $\eta([X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]) \in -\mathbb{N}$.*

De plus, il existe un poids λ de $(\mathrm{ad}\ \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^n\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}$ *ou de* $(\mathrm{ad}\ \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^{n-1} \cdot \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}$ *et un $\gamma_1 \in \Gamma_0$ tels que $\lambda(\gamma_1[X_\mu, Y_\mu])$ soit de partie rationnelle strictement négative.*

Démonstration. a) S'il existe un poids η de $(\mathrm{ad}\ \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^n\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}$ et un $\gamma \in \Gamma_0$ tels que $\eta([X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]) \notin -\mathbb{N}$, alors le $\mathfrak{sl}_2$-module engendré par un vecteur non nul X_η de $(\mathrm{ad}\ \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^n\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\eta)$ est de dimension infinie donc $\eta + \mathbb{N}\gamma.\mu$ est inclus dans l'ensemble des poids et $\alpha' - n\delta' + \mathbb{N}\delta'$ dans Ω'; en particulier $\alpha' + \delta' \in \Omega'$, d'où une contradiction.

b) Sinon, pour tout poids η et tout $\gamma \in \Gamma_0$, on a bien $\eta([X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]) \in -\mathbb{N}$.

b1) Si on peut trouver un poids η et un élément $\gamma_1 \in \Gamma_0$ tel que $\eta(\gamma_1[X_\mu, Y_\mu])$ soit de partie rationnelle strictement négative, on a le résultat.

b2) Sinon , on a forcément $(\alpha' - n\delta')(\nu^{-1}(\delta')) = 0$ (et toutes les parties rationnelles des $\eta(\gamma[X_\mu, Y_\mu])$ sont égales à 0) et n est supérieur ou égal à 1.

On considère alors λ un poids dans $(\mathrm{ad}\, \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^{n-1}\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}$ et on reprend la même discussion qu'en a) et b) avec λ à la place de η.

Dans ce cas, si $X_\lambda \in (\mathrm{ad}\, \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^{n-1}\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\lambda)$, on peut avoir $[Y'_{\gamma.\mu}, X_\lambda] \neq 0$, mais on a toujours $[Y'_{\gamma.\mu}, [Y'_{\gamma.\mu}, X_\lambda]] = 0$.

-) le cas b_λ), $\lambda([X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]) \in -\mathbb{N}$.

On choisit $\gamma_1 \in \Gamma_0$ tel que $\lambda(\gamma_1[X_\mu, Y_\mu])$ soit de partie rationnelle strictement négative. Cela est forcément possible : dans le cas contraire, on a $(\alpha' - n\delta')(\nu^{-1}(\delta')) = 0$ et $(\alpha' - (n-1)\delta')(\nu^{-1}(\delta')) = 0$, donc $\delta'(\nu^{-1}(\delta')) = 0$; mais alors $\alpha'(\nu^{-1}(\delta')) = 0$, ce qui, d'après 7.5, contredit notre hypothèse initiale.

-) le cas a_λ) Supposons $\lambda([X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]) \notin -\mathbb{N}$. (Dans ce cas, on sait que si $[Y'_{\gamma.\mu}, X_\lambda] \neq 0$, alors $(\lambda - \gamma.\mu)([X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]) \in -\mathbb{N}$.) On a alors :

- soit $(\lambda - \gamma.\mu)([X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]) \notin -\mathbb{N}$ (ou même seulement si $[Y'_{\gamma.\mu}, X_\lambda] = 0$) le $\mathfrak{sl}_2$-module engendré par X_λ est encore de dimension infinie.

- soit $[Y'_{\gamma.\mu}, X_\lambda] \neq 0$ et $(\lambda - \gamma.\mu)([X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]) = 0$. Si le $\mathfrak{sl}_2$-module était de dimension finie $\lambda - 2\gamma.\mu$ serait un poids de ce module ($\lambda([X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]) = 2$)); ce qui contredit 8.4. Le $\mathfrak{sl}_2$-module est donc encore de dimension infinie.

- soit $[Y'_{\gamma.\mu}, X_\lambda] \neq 0$ et $(\lambda - \gamma.\mu)([X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]) = -1$. On change alors éventuellement de λ et on recommence la discussion. Reste alors seulement le cas suivant :

Pour tout poids λ intervenant dans la décomposition de $(\mathrm{ad}\, \mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^{n-1} \cdot \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}$, pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, pour tout $X_\lambda \in (\mathrm{ad}\, \mathfrak{L}_{\mathbb{K},\delta'})^{n-1}\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}(\lambda)$, on a :

(1) $[Y'_{\gamma.\mu}, X_\lambda] \neq 0$;

(2) $\lambda([X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]) = 1$.

Mais alors, le crochet $[\gamma.X_\mu, \gamma.Y_\mu]$ valant $(\gamma(e)/2)[X'_{\gamma.\mu}, Y'_{\gamma.\mu}]$, on a $\lambda([\gamma.X_\mu, \gamma.Y_\mu]) = (\gamma(e)/2)$ et ceci indépendamment de γ et λ (choisi comme précédemment).

Ainsi,

$$\begin{aligned}\lambda(\sum_{\gamma\in\Gamma_0}[\gamma.X_\mu, \gamma.Y_\mu]) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_0}(\gamma(e)/2) = (1/2)\,\mathrm{trace}_k(e) \\ &= |\Gamma_0|\langle \alpha' - (n-1)\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle \in \mathbb{Q}_- \ \ (\text{cf. } 8.3)\,.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

D'autre part, (d'après (1)) $\lambda - \gamma.\mu$ est un poids de $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L}_{\mathbb{K},-\delta'})^n\mathfrak{L}_{\mathbb{K},\alpha'}$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$.

Comme on est dans le cas b2), on sait que $(\lambda - \gamma.\mu)(\gamma_1[X_\mu, Y_\mu])$ admet 0 pour partie rationnelle (ceci pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_0$). Dans le cas $\gamma_1 = \gamma$, on obtient alors :
$(\lambda - \gamma.\mu)(\gamma_1[X_\mu, Y_\mu]) = (\gamma(e)/2) - \gamma(e)$. La partie rationnelle de $\gamma(e)$ (donc de e) est nulle. Ceci implique $(1/2)\,\mathrm{trace}_k(e) = |\Gamma_0|\langle\alpha' - (n-1)\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle = 0$ et comme $\langle\alpha' - n\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle = 0$, on obtient $\langle\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle = 0$; d'où une contradiction puisque $\langle\alpha', \nu^{-1}(\delta')\rangle < 0$.

Dans ce sous-cas correspondant à a), on a encore $\alpha' + \delta' \in \Omega'$. □

Nous utilisons à présent la même notation λ pour les poids précédemment notés η (dans le cas b1)) et λ (dans le cas b2)) de la démonstration précédente. Avec ces choix, nous avons :

$\lambda([X'_{\gamma_1.\mu}, Y'_{\gamma_1.\mu}]) \in -\mathbb{N}$ et

$\lambda(\gamma_1.[X_\mu, Y_\mu])$ de partie rationnelle strictement négative (donc $\lambda([[X'_{\gamma_1.\mu}, Y'_{\gamma_1.\mu}]) \neq 0)$.

Supposons $\lambda([X'_{\gamma_1.\mu}, Y'_{\gamma_1.\mu}]) = -m < 0$, on sait que λ, $\lambda + \gamma_1.\mu$, $\ldots \lambda + m\gamma_1\mu$ sont des poids. De plus, d'après 8.4, on a :

$$(+)\quad (\lambda + m\gamma_1.\mu)(\sum_{\Gamma_0} \gamma.[X_\mu, Y_\mu]) = \begin{cases} |\Gamma_0|\langle\alpha' + (m-n)\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle < 0 & \text{(dans le cas b1)} \\ |\Gamma_0|\langle\alpha' + (m-n+1)\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle < 0 & \text{(dans le cas b2)} \end{cases}$$

(puis que si $\langle\alpha' - n\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle = 0$, alors $\langle\delta', \nu^{-1}(\delta')\rangle < 0$).

Deux cas se présentent alors.

-) S'il existe $\gamma_2 \in \Gamma_0$ tel que $(\lambda + m\gamma_1.\mu)([X'_{\gamma_2.\mu}, Y'_{\gamma_2.\mu}]) \notin \mathbb{Z}$, alors on a un $\mathfrak{sl}_2$-module de dimension infinie et donc $\alpha' + \mathbb{N}\delta' \subset \Omega'$.

-) Sinon, pour tout $\gamma_2 \in \Gamma_0$, on a $(\lambda + m\gamma_1.\mu)([X'_{\gamma_2.\mu}, Y'_{\gamma_2.\mu}]) \in \mathbb{Z}$. Montrons qu'on peut alors choisir γ_2 tel que cet entier soit strictement négatif (ce qui nous permettra d'allonger la chaîne de direction δ' issue de α').

D'après (+), il existe $\gamma_2 \in \Gamma_0$ tel que la partie rationnelle de $(\lambda + m\gamma_1.\mu)(\gamma_2.[X_\mu, Y_\mu])$ soit strictement négative.

On a alors :

$(\lambda + m\gamma_1.\mu)([X'_{\gamma_2.\mu}, Y'_{\gamma_2.\mu}]) = (2/\gamma_2(e))(\lambda + m\gamma_1.\mu)(\gamma_2.[X_\mu, Y_\mu]) \in \mathbb{Z}^*$ et

$(\lambda + m\gamma_1.\mu)([X'_{\gamma_1.\mu}, Y'_{\gamma_1.\mu}]) = m \in \mathbb{N}^*$.

Si ces deux entiers sont positifs, en notant h l'entier $(\lambda+m\gamma_1.\mu)([X'_{\gamma_2.\mu}, Y'_{\gamma_2.\mu}])$,on a :
$\lambda(\gamma_1.[X_\mu, Y_\mu]) = -\gamma_1(e)m/2$ et $(\lambda + m\gamma_1.\mu)(\gamma_2.[X_\mu, Y_\mu]) = \gamma_2(e)h/2$.

Les scalaires $(\lambda + m\gamma_1.\mu)(\gamma_2.[X_\mu, Y_\mu])$ et $\lambda(\gamma_1.[X_\mu, Y_\mu])$ ont donc des parties rationnelles de signes opposés, ce qui contredit nos choix de γ_1 et γ_2.

L'entier $(\lambda + m\gamma_1.\mu)([X'_{\gamma_2.\mu}, Y'_{\gamma_2.\mu}]$ est donc strictement négatif, notons $-l$ sa valeur.

Ceci nous permet d'affirmer, toujours grâce à la théorie des $\mathfrak{sl}_2$-modules, que les racines $\alpha' + (m-n)\delta'$, ..., $\alpha' + (m+l-n)\delta'$ (dans le cas b1) ou les racines $\alpha' + (m-n+1)\delta'$, ..., $\alpha' + (m+l-n+1)\delta'$ (dans le cas b2) sont encore dans Ω'.

Si l'entier $m+l-n$ (ou $m+l-n+1$) est supérieur ou égal à 1, on a le résultat cherché, sinon on reprend (et ceci autant de fois que nécessaire) le raisonnement à partir de (+) avec $\lambda+m\gamma_1.\mu+l\gamma_2.\mu$ à la place de $\lambda+m\gamma_1.\mu$ de façon à prolonger suffisamment la chaîne .

Ceci permet donc, dans le premier cas, de montrer que $\alpha' + \delta' \in \Omega'$.

Second résultat :

Dans tous les cas, $\zeta' = \alpha' + \delta' \in \Omega'$ contredit notre hypothèse $\Theta \not\subset \Omega'$.

Nous obtenons ainsi l'égalité de Θ et Ω'.

Troisième étape :

Reste à montrer la compatibilité des coracines au sens de Δ' restreint à Ω' et au sens du S.G.R considérer ici, pour pouvoir démontrer (SSR2) à partir de la structure de système de racines de Ω'.

Seul est à considérer le cas des coracines des racines imaginaires positives et même situées dans $K(\Phi)$, et il est encore évident que les deux notions coïncident en ce qui concerne les racines de Ψ_∞. Soit donc $\alpha' \in K(\Phi) \setminus \Psi_\infty$. On doit montrer que pour toute racine $\beta' \in \Omega'$, les scalaires $\langle \beta', \hat{\alpha'}_{\Omega'} \rangle$ et $\langle \beta', \hat{\alpha'}_{\Delta'} \rangle$ sont de même signe au sens strict.

Si la racine β' est réelle, c'est évident car $\langle \beta', \hat{\alpha'}_{\Omega'} \rangle$ et $\langle \beta', \hat{\alpha'}_{\Delta'} \rangle$ sont du signe de $\langle \alpha', \beta' \rangle$.

Sinon, on a $\langle \beta', \hat{\alpha'}_{\Omega'} \rangle \leq 0$ et $\langle \beta', \hat{\alpha'}_{\Delta'} \rangle \leq 0$. De plus, $\langle \beta', \hat{\alpha'}_{\Delta'} \rangle = 0$ si et seulement si un support de β' n'est pas lié à un support de α' (suivant Π'). Mais alors, il est clair que dans les bonnes décompositions suivant les racines de Φ, les supports de α' et de β' seront également disjoints. La réciproque est du même ordre : $\langle \beta', \alpha'^{\,\hat{}}_{\Omega'} \rangle = 0$ si et seulement si un support de β' ne rencontre pas un support de α' (suivant Φ). On obtient alors de bonnes décompositions de α' et β' en remplaçant les éléments de Φ par leurs écritures dans la base Π', ce qui donne évidemment deux supports disjoints et non liés pour α' et β'.

Troisième résultat : Les notions de coracines sont compatibles et (SSR2) pour Ω' (étudié dans Δ') est évident au vu de sa définition comme système de racines associé à un SGR.

Sous les hypothèses de ce paragraphe et avec la construction précédente, nous pouvons alors énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 8.7. *Le système de racines restreintes Ω' de $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}$ par rapport à $\mathfrak{s}_{\mathbb{K}}$ (identifié à celui de leurs restrictions à $\mathfrak{s}$) est un sous-système (au sens de* [Ba]) *de Δ'.*

§9. Construction d'une forme déployée à l'intérieur d'une forme presque-déployée d'une algèbre de Kac-Moody

Considérons, comme dans la dernière remarque du §7, une forme presque-déployée $\mathfrak{g}_k$ d'une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ dont le système de racines restreintes est noté Δ' de base $(\alpha'_\imath)_{\imath \in I'}$.

Nous nous proposons à présent de construire une k-sous-algèbre de $\mathfrak{g}_k$ déployée (par rapport à $\mathfrak{s}$) et dont le système de racines Ω' est :

a) *un sous-système de Δ' (au sens de [Ba], rappelé au* §1);

b) *engendré par une famille $(n_\imath \alpha'_\imath)$ où $n_\imath \in \mathbb{N}^*$ pour tout $\imath \in I'$ et où $\alpha'_\imath$ parcourt l'ensemble des racines restreintes simples de Δ'.*

Remarque. Notons que l'ensemble I' est contenu dans $(I - I_0)/\Gamma_d$ mais ne lui est pas nécessairement égal puisqu'on extrait de $((\alpha_i)')_{(I-I_0)/\Gamma_d}$ une famille de racines $(\alpha'_\imath)_{\imath \in I'}$ non deux à deux $\mathbb{Q}$-proportionnelles.

Notre idée est donc, pour chaque racine $\alpha'_\imath$, de "choisir" un entier $n_\imath$ et de déterminer $X_{\imath^*} \in \mathfrak{g}_{n_\imath \alpha'_\imath}$, $Y_{\imath^*} \in \mathfrak{g}_{-n_\imath \alpha'_\imath}$ fixes sous l'action de Γ_0 tels que $[X_{\imath^*}, Y_{\imath^*}] = \alpha'^{\,\hat{}}_\imath \in \mathfrak{s}$ soit une coracine de $n_\imath \alpha'_\imath$ (i.e. de $\alpha'_\imath$) au sens de [Ba]. Lorsque $\alpha'_\imath \in \Delta'^{\mathrm{re}}$, l'entier $n_\imath$ vaut 2 (resp. 1) si $\alpha'_\imath$ est multipliable (resp. non multipliable).

Précisons d'ores et déjà un peu ce choix des générateurs $X_{\imath^*}$ et $Y_{\imath^*}$. Le sous-espace $\mathfrak{g}_{n_i \alpha'_i}$ est égal à $\oplus_{\widetilde{\alpha}} \mathfrak{g}_{\widetilde{\alpha}}$ où $\widetilde{\alpha}$ parcourt l'ensemble des racines telles que $\psi(\widetilde{\alpha})$ admet $n_\imath \alpha'_\imath$ pour restriction à $\mathfrak{s}$. Le vecteur $X_{\imath^*}$ (resp.

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

$Y_{\imath^*}$) sera, en réalité, choisi dans $\mathfrak{g}_{n_\imath \alpha'_\imath} \cap (\oplus_{\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}(\Gamma_d(i) \cup I_0)} \mathfrak{g}_{\widetilde{\alpha}})$ (resp. $\mathfrak{g}_{-n_\imath \alpha'_\imath} \cap (\oplus_{\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}(\Gamma_d(i) \cup I_0)} \mathfrak{g}_{\widetilde{\alpha}})$ (sous-espace que nous noterons dans la suite $\mathfrak{g}_{\imath^*}$ (resp. $\mathfrak{g}_{-\imath^*}$)).

Remarques. 1. Comme nous avons a priori dû extraire, dans le cas où la réalisation initiale n'est pas libre, l'ensemble des racines simples $(\alpha'_\imath)_{\imath \in I'}$ de $(\alpha'_i)_{i \in (I-I_0)/\Gamma_d}$, l'orbite $\Gamma_d(i)$ n'est pas bien déterminée par $\imath \in I'$ (dans le cas α'_i imaginaire). Nous nous contentons de choisir $\Gamma_d(i) \cup I_0$ tel qu'il existe dans $\widetilde{\Delta}(\Gamma_d(i) \cup I_0)$ une racine $\widetilde{\alpha}$ pour laquelle la restriction de $\psi(\widetilde{\alpha})$ à $\mathfrak{s}$ soit $n_i \alpha'_i$. **Cette discussion n'a évidemment pas lieu d'être si la réalisation initiale est libre** (en particulier dans le cas Kac-Moody).

2. Le choix des entiers $n_\imath$ est bien sûr lié à la possibilité de trouver de tels générateurs.

On définit alors la k-sous-algèbre $\mathfrak{L}$ comme la k-sous-algèbre de $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}^{\Gamma_0}$ engendrée par les triplets $(X_{\imath^*}, Y_{\imath^*}, [X_{\imath^*}, Y_{\imath^*}])$ pour $\imath \in I'$ et la sous-algèbre $\mathfrak{s}$.

Il s'agit de voir qu'on obtient ainsi une algèbre de Kac-Moody sur k, les relations suivantes résultent des choix des générateurs :

$$\begin{cases} [h, h'] = 0, \quad (\forall (h, h') \in \mathfrak{s}^2); \\ [h, X_{\imath^*}] = n_\imath \langle \alpha'_\imath, h \rangle X_{\imath^*}, \quad (\forall h \in \mathfrak{h}, \forall \imath \in I'); \\ [h, Y_{\imath^*}] = -n_\imath \langle \alpha'_\imath, h \rangle Y_{\imath^*}, \quad (\forall h \in \mathfrak{h}, \forall \imath \in I'); \\ [X_{\imath^*}, Y_{\jmath^*}] = \delta_{\imath\jmath} \alpha'{}^{\wedge}_\imath, \quad (\forall (\imath, \jmath) \in I'^2); \end{cases}$$

plus précisément, la dernière relation découle du fait que $[\mathfrak{g}_{\imath^*}, \mathfrak{g}_{-\jmath^*}] = 0$ si $\Gamma_d(i) \neq \Gamma_d(j)$.

Reste à voir qu'il n'existe dans $\mathfrak{L}$ aucun idéal non trivial intersectant $\mathfrak{s}$ trivialement. Il suffit pour cela de montrer que les relations de Serre sont vérifiées puisque nous sommes dans le cas symétrisable.

Pour les racines réelles, cela résulte de la structure connue de Δ' puisque, si $R_\imath$ est la reflexion associée à $\alpha'_\imath$, alors $R_\imath(n_\jmath \alpha'_\jmath) + n_\imath \alpha'_\imath \notin \Delta'$.

Pour les racines imaginaires, la seule relation à vérifier est $[X_{\imath^*}, X_{\jmath^*}] = 0$ (resp. $[Y_{\imath^*}, Y_{\jmath^*}] = 0$) si $\langle \alpha'_\imath, \alpha'{}^{\wedge}_\jmath \rangle = 0$. Or, les deux racines simples ne pouvant être $\mathbb{Q}$-proportionnelles, l'égalité $\langle \alpha'_\imath, \alpha'{}^{\wedge}_\jmath \rangle = 0$ montre qu'une composante connexe de $\Gamma_d(i) \cup I_0$ rencontrant $\Gamma_d(i)$ et une composante connexe de $\Gamma_d(j) \cup I_0$ rencontrant $\Gamma_d(j)$ ne peuvent être liées; la relation cherchée résulte alors du choix de $X_{\imath^*}$ et $X_{\jmath^*}$ dans $\mathfrak{g}_{\imath^*}$ et $\mathfrak{g}_{\jmath^*}$ (resp. de $Y_{\imath^*}$ et $Y_{\jmath^*}$ dans $\mathfrak{g}_{-\imath^*}$ et $\mathfrak{g}_{-\jmath^*}$) .

Remarque. Dans ce § 9, en supposant seulement $\Gamma_d(i) \cup I_0$ symétrisable pour tout $i \in I$ (et éventuellement A non symétrisable), nous pouvons encore construire une algèbre de Kac-Moody-Borcherds vérifiant ces propriétés. Cependant, nous n'obtenons pas forcément ainsi l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds minimale (i.e. ne possédant aucun idéal non trivial rencontrant $\mathfrak{s}$) mais seulement un quotient de celle définie par les relations de Serre.

Nous allons à présent, cas par cas, décrire les choix des entiers $n_\imath$ et des générateurs $X_{\imath^*}$, $Y_{\imath^*}$. Nous avons vu que pour $\imath \in I'$, l'orbite $\Gamma_d(i)$ n'est pas forcément bien déterminée; cependant, le type (i.e. fini, affine ou indéfini) de toute composante connexe de $\Gamma_d(i) \cup I_0$ rencontrant $\Gamma_d(i)$ ne dépend ni de la composante connexe ni de l'orbite choisie puisque c'est le type de la racine $\alpha'_\imath$ (cf. [Ba; 6.1 et 6.2]), nous parlerons ici *du type de* $\imath^*$ pour $\imath \in I'$.

A. Le cas réel : $\imath^*$ est de type fini (autrement dit $\Gamma_d(i) \cup I_0$ est de type fini)

Ce cas est traité, dans le cadre des groupes par Borel et Tits [B-T, th 7.2].

Voyons comment s'y ramener (nous n'utiliserons que la première partie de la démonstration du théorème 7.2).

On note α' la racine $\alpha'_\imath$ (resp. $2\alpha'_\imath$) si $\alpha'_\imath$ est non multipliable (resp. est multipliable) et $\mathfrak{g}(\alpha')$ la sous-algèbre semi-simple engendrée par $\mathfrak{g}_{\pm\alpha'}$ (elle est alors contenue dans la sous-algèbre $\mathfrak{g}(\Gamma_d(i) \cup I_0) = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta(\Gamma_d(i) \cup I_0)} \mathfrak{g}_\alpha))$.

La k-sous-algèbre $\mathfrak{g}_k(\alpha') = (\mathfrak{g}(\alpha'))^{\Gamma_0}$ est une k-forme de $\mathfrak{g}(\alpha')$ dont la SATDM est contenue dans (et donc égale à) $\mathfrak{s}_k \cap (\oplus_{j \in \Gamma_d(i) \cup I_0} \mathbb{K}\alpha_j^\vee) = (\oplus_{j \in \Gamma_d(i) \cup I_0} k\alpha_j^\vee)^{\Gamma_0} = k\alpha'^\vee_\imath$ (où $\alpha'^\vee_\imath$ est défini au §7). On note G le $\bar{\mathbb{K}}$-groupe algébrique semi-simple adjoint correspondant à $\mathfrak{g}(\alpha')$; il est défini sur k et déployé sur $\mathbb{K}$. Le sous-tore S de G correspondant à la SATDM $k\alpha'^\vee_\imath$ est déployé sur k (c'est-à-dire k-isomorphe au groupe multiplicatif), c'est un tore k-déployé maximal.

Le système de racines (sur k) de (G, S) est $\{\pm\alpha'\}$ et le sous-groupe unipotent de G correspondant est $U_{\pm\alpha'}$ isomorphe (par une application Γ_0-équivariante notée exp) à $\mathfrak{g}_{\pm\alpha'}$.

Pour $X \in (\mathfrak{g}_{\pm\alpha'})^{\Gamma_0} - \{0\}$, la décomposition de Bruhat permet d'écrire de manière unique :

$$\exp(X) = \exp(X^*) n(X) \exp(X_*)$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

avec X^* et X_* dans $(\mathfrak{g}_{-\alpha'})^{\Gamma_0}$ et $n(X)$ dans $G_k = G^{\Gamma_0}$ normalisant S.

On montre (assez facilement) dans [B-T] que :

-) $X^* = X_*$

-) si l'on choisit $X_0 \in (\mathfrak{g}_{\alpha'})^{\Gamma_0} - \{0\}$ et si l'on note $n = n(X_0)$, $E_{\alpha'} = \exp(\bar{\mathbb{K}}X_0)$ et enfin $E_{-\alpha'} = \exp(\bar{\mathbb{K}}X_0^*)$, alors $E_{\pm\alpha'}$ est normalisé par S et le sous-groupe Z de G engendré par $E_{\pm\alpha'}$ et S est connexe, défini sur k et vérifie $Z = SE_{\alpha'}\{1, n\}E_{\alpha'}$ avec $nE_{-\alpha'}n^{-1} = E_{\alpha'}$.

On a donc aussi $Z = n^{-1}SE_{\alpha'} \cup E_{-\alpha'}SE_{\alpha'}$; ce qui montre que l'algèbre de Lie de Z est $\bar{\mathbb{K}}X_0 \oplus \bar{\mathbb{K}}X_0^* \oplus \bar{\mathbb{K}}\alpha'^{\vee}_{\imath}$.

Comme $[X_0, X_0^*] \in Lie(Z) \cap \mathfrak{g}(I_0)^{\Gamma_0}$, il est k colinéaire à $\alpha'^{\vee}_{\imath}$ et il suffit de montrer qu'il n'est pas nul.

Si ce crochet s'annulait, alors $\bar{\mathbb{K}}X_0$ serait un idéal de $Lie(Z)$ et donc $E_{\alpha'}$ serait distingué dans Z ([H; 13.3]). Or, pour chaque $Y \in kX_0^*$, on a : $\exp(Y)\exp(X_0)\exp(-Y) = \exp(Y + X_0^*)n\exp(-Y + X_0^*)$ et ceci ne peut être de la forme $\exp(X')$ avec $X' \in kX_0$ que si $Y + X_0^* = -Y + X_0^*$ (par unicité de la décomposition de Bruhat) c'est-à-dire $Y = 0$, d'où l'absurdité.

Il est alors facile de modifier X_0^* à une constante près pour obtenir le $\mathfrak{sl}_2$-triplet associé à α' cherché.

B. Le cas affine : $\imath^*$ est de type affine (autrement dit toute composante connexe de $\Gamma_d(i) \cup I_0$ rencontrant $\Gamma_d(i)$ (pour i tel que $(\alpha_i)' \in \mathbb{Q}\,\alpha'_\imath$) est de type affine, les autres (contenues dans I_0) étant de type fini).

Soit J une composante connexe de $\Gamma_d(i) \cup I_0$ rencontrant $\Gamma_d(i)$ (pour i tel que $(\alpha_i)' \in \mathbb{Q}\,\alpha'_\imath$), il existe dans $\widetilde{\Delta}_+(J)$ une racine imaginaire affine $\widetilde{\delta}$ de hauteur minimale qui de plus est stable sous l'action de $W(I_0)$ et sous l'action de Γ_d^J le stabilisateur de J dans Γ_d (par stabilité de $\widetilde{\Delta}_+^{\mathrm{im}}(J) \subset \mathbb{Q}_+\widetilde{\delta}$ et minimalité de $\widetilde{\delta}$) donc sous l'action de Γ_0^J le stabilisateur de J dans Γ_0. Le sous-espace $[\mathfrak{g}_{\widetilde{\delta}}, \mathfrak{g}_{-\widetilde{\delta}}]$ est de dimension un et est engendré par $\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\delta}))$. Les deux sous-espaces $\mathfrak{g}_{\widetilde{\delta}}$ et $\mathfrak{g}_{-\widetilde{\delta}}$ sont stables sous l'action de Γ_0^J qui agit comme un groupe de Galois donc il existe $X \in (\mathfrak{g}_{\widetilde{\delta}})^{\Gamma_0^J}$ et $Y \in (\mathfrak{g}_{-\widetilde{\delta}})^{\Gamma_0^J}$ tels que $(X, Y) \in k - \{0\}$ et $[X, Y] = (X, Y)\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\delta}))$ est dans $k\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\delta}))$.

Considérons alors un ensemble Γ_J de représentants de Γ_0/Γ_0^J et posons $X_{\imath^*} = \sum_{\gamma\in\Gamma_J} \gamma.X$ et $Y_{\imath^*} = \sum_{\gamma\in\Gamma_J} \gamma.Y$.

Si γ et γ' sont deux éléments distincts de Γ_J, les supports des racines

$\gamma.\widetilde{\delta}$ et $\gamma'.\widetilde{\delta}$ sont disjoints et non liés (J est une composante connexe); ainsi :

$$\begin{aligned}[X_{\imath^*}, Y_{\imath^*}] &= \sum_{\Gamma_J} (\gamma X, \gamma Y)\nu^{-1}(\gamma.\psi(\widetilde{\delta})) \\ &= \sum_{\Gamma_J} (X, Y)\nu^{-1}(\gamma.\psi(\widetilde{\delta})) \\ &= (X, Y)(|\Gamma_J]/|\Gamma_0|) \sum_{\Gamma_0} \nu^{-1}(\gamma.\psi(\widetilde{\delta})) \\ &= (X, Y)|\Gamma_J]\psi(\widetilde{\delta})'.\end{aligned}$$

Nous avons ainsi le triplet associé à $n_i\alpha'_i$, le coefficient n_i correspondant à la somme des coordonnées de $\widetilde{\delta}$ suivant $\Gamma_d(i) \cap J$).

C. Le cas indéfini : $\imath^*$ est de type indéfini (autrement dit toute composante connexe de $\Gamma_d(i) \cup I_0$ rencontrant $\Gamma_d(i)$ (pour i tel que $(\alpha_i)' \in \mathbb{Q}\,\alpha'_\imath$) est de type indéfini, les autres (contenues dans I_0) étant de type fini. Fixons un tel indice i et notons J la composante connexe de $\Gamma_d(i) \cup I_0$ le contenant.

LEMME 9.1. *Dans $\widetilde{\Delta}(J)$, il existe une racine imaginaire $\widetilde{\delta}$ telle que :*
a) *pour tout $j \in I_0$, on a $\langle \widetilde{\delta}, \widetilde{\alpha}_{\check{j}} \rangle = 0$;*
b) *le support de $\widetilde{\delta}$ est J;*
c) *$\widetilde{\delta}$ est dans $K(\widetilde{\Pi})$ (i.e. pour tout $j \in I$, on a $\langle \widetilde{\delta}, \widetilde{\alpha}\,_{\hat{j}} \rangle \le 0$);*
d) *$\widetilde{\delta}$ est fixe sous l'action de Γ_d^J, le stabilisateur dans Γ_d de $\widetilde{\Delta}(J)$;*
f) *$\psi(\widetilde{\delta})$ est minimale (à 3/4 près) en hauteur parmi les images des racines vérifiant les quatre premières propriétés.*

Démonstration. Il est clair qu'on peut trouver une racine $\widetilde{\beta}$ imaginaire positive dont le support contient i et vérifiant c).

Posons alors $\widetilde{\eta} = \sum_{w \in W(I_0)} w.\widetilde{\beta}$. On a $\langle \widetilde{\eta}, \widetilde{\alpha}_{\check{j}} \rangle \le 0$ pour tout $j \in I$ et $\widetilde{\eta}$ est encore dans $K(\widetilde{\Pi})$ puisque les racines apparaîssant dans cette somme sont toutes imaginaires positives et ont des supports non disjoints. Enfin, son support contient la composante connexe de $\{i\} \cup I_0$ contenant i.

De plus, les scalaires $\langle \widetilde{\eta}, \widetilde{\alpha}_{\check{j}} \rangle$ pour tout $j \in I_0$ sont tous nuls.

Considérons alors $\widetilde{\delta}_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma_d^J} \gamma.\widetilde{\eta}$, c'est une somme de racines imaginaires positives (toutes dans $K(\widetilde{\Pi})$ et dont les supports recouvrent J), donc c'est une racine vérifiant a), b), c), d).

L'ensemble de telles racines n'étant pas vide, il est clair qu'on peut alors déterminer $\widetilde{\delta}$ par minimalité (à 3/4 près) de la hauteur de son image par ψ. ∎

La racine $\widetilde{\delta}$ est à présent choisie comme dans le lemme 9.1.

Comme dans B., on choisit $X \in (\mathfrak{g}_{\widetilde{\delta}})^{\Gamma_0^J}$ et $Y \in (\mathfrak{g}_{-\widetilde{\delta}})^{\Gamma_0^J}$ tels que $(X,Y) \in k - \{0\}$ et l'on a $[X,Y] = (X,Y)\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\delta})) \in k\nu^{-1}(\psi(\widetilde{\delta}))$.

Considérons un ensemble Γ_J de représentants de Γ_0/Γ_0^J et posons $X_{\imath^*} = \sum_{\gamma\in\Gamma_J} \gamma X$ et $Y_{\imath^*} = \sum_{\gamma\in\Gamma_J} \gamma Y$; on a encore $[X_{\imath^*}, Y_{\imath^*}] = (X,Y)|\Gamma_J|\psi(\widetilde{\delta})'$.

Nous avons ainsi le triplet associé à $n_\imath\alpha'_\imath$.

Remarque. Dans le cas d'une réalisation initiale non libre, si, dans les cas B. ou C., plusieurs $i \in I$ sont tels que $(\alpha_i)' \in \mathbb{Q}\,\alpha'_\imath$ (sans être conjugués sous Γ_d), la construction peut être faite pour n'importe lequel mais le $n_\imath$ obtenu ne sera pas nécessairement le même.

Les résultats du § 8 nous permettent alors d'affirmer que si $\mathfrak{L}$ désigne la k-sous-algèbre engendrée par les $X_{\imath^*}, Y_{\imath^*}$ précédemment définis.

Théorème 9.2. *La k-algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{L}$ est une k-sous-algèbre de $\mathfrak{g}_k$ déployée (par rapport à $\mathfrak{s}$) et dont le système de racines Ω' est le sous-système de Δ' engendré par la famille $(n_\imath\alpha'_\imath)$.*

Remarques. 1. Dans le cas où p racines $(\alpha_i)'$ sont $\mathbb{Q}$-proportionnelles, on peut en fait (via la construction précédente) choisir $2p$ générateurs (indépendants) dans des $\mathfrak{g}_{\pm n_i\alpha'_i}$ pour p valeurs de n_i (éventuellement non distinctes).

2. Ceci n'est bien sûr qu'un cas particulier de ce que pourrait être la construction de sous-algèbre Γ_0-très-régulière à l'intérieur d'une sous-algèbre Γ_0-birégulière. Cependant le cas général nécessite beaucoup trop d'hypothèses (existence de triplets associés à toute racine de la base, stabilité sous l'action de Γ_0....) pour des résultats bien partiels et perd ici largement son interêt.

3. Pour les racines réelles multipliables, l'article de Borel et Tits nous a permis de montrer l'existence du $\mathfrak{sl}_2$-triplet dans les espaces correspondants aux doubles des racines. Notons cependant que dans le cas quasi-déployé nous avons pu construire le triplet dans les espaces correspondants aux racines non divisibles; cela est donc encore possible si l'orbite Γi correspondante n'est pas liée à I_0.

Index des principales notations et des définitions

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press

$\mathfrak{k}$ . . . (4.A) sous-algèbre des points fixes sous les actions de Γ.
forme bilinéaire invariante sous Γ . . . (4.1).
$\mathfrak{h}''$ choix d'un supplémentaire particulier . . . (4.1).
Γ, groupe de semi-automorphismes de diagramme . . . (4.B).
θ' . . . (4.B) fonction hauteur sur Δ invariante sous Γ .
racines relatives, $\bar{\alpha}$, groupe de Weyl relatif . . . (4.B).
sous-algèbre Γ-régulière et Γ-birégulière . . . (5.).
sous-algèbre Γ-très-régulière . . . (6.).
semi-automorphismes de première espèce . . . (7.)
(I_0, Γ_d) . . . (7.3) type du groupe fini de semi-automorphismes de première espèce Γ.
$\mathfrak{s}$ . . . (7.) sous-algèbre de $\mathfrak{h}$ des points fixes sous les deux actions de Γ.
$\mathfrak{T}^\circ$ . . . (7.) cône de Tits ouvert.
(T) . . . (7.) condition permettant d'utiliser les résultats classiques concernant $\mathfrak{k}^\circ$.
(D) (E) . . . (7.4) condition portant sur la matrice et l'action du groupe
sous-algèbre Γ_0-régulière et Γ_0-birégulière . . . (8.).

RÉFÉRENCES

[Ba] N. Bardy, *Systèmes de racines infinis*, Mémoires de la SMF, **65** (1996).

[Bbki, Lie] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Paris.

[Bo] R. Borcherds, *Generalized Kac-Moody algebras*, J. algebra, **115** (1989), 501–512.

[B-T] A. Borel et J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. I.H.E.S., **27** (1965).

[B_3R] V. Back, N. Bardy, H. Ben-Messaoud et G. Rousseau, *Formes presque déployées d'algèbres de Kac-Moody : Classification et racines relatives*, J. Algebra, **171** (1995), 43–96.

[D] E.B. Dynkin, *Sous-algèbres semi-simples des algèbres semi-simples*, Amer. math. Soc. Transl., Ser. 2, **6**, 111–244.

[H] J.E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975.

[K] V.G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, troisième édition, Cambridge University Press, 1990.

[M] J. Morita, *Satured sets for generalized Cartan matrices*, Tsukuba J. Math., **11** (1987), 77–91.

[N] S. Naito, *On regular subalgebras of a symmetrizable Kac-Moody algebra*, Proc. Japan Acad., **67** (1991), 117–121.

[T] J. Tits, *Sous-algèbres des algèbres de Lie semi-simples*, Séminaire Bourbaki, **119** (1955), 01–18.

Institut Elie Cartan
U.M.R. 9973
Département de mathématiques de l'Université de Nancy I
B.P. 239 54506, Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex
France
Nicole.Bardy-Panse@iecn.u-nancy.fr

https://doi.org/10.1017/S0027763000007066 Published online by Cambridge University Press