BEMERKUNGEN ZUR BERECHNUNG DER SCHWANKUNGSRÜCKSTELLUNG IN DER BRANDVERSICHERUNG

EMMI HOFMEISTER
München

In dem vorliegenden Artikel werden verschiedene Berechnungsmethoden diskutiert. Mit Hilfe mathematischer Tests werden die den Näherungsverfahren zugrundeliegenden Annahmen überprüft. Ausserdem ergibt ein Vergleich der Ergebnisse nach den verschiedenen Methoden einen Überblick bezüglich der Grenzen, in denen die Schwankungsrückstellung liegen sollte.

Die exakte Berechnung der benötigten Reserve ist nach den Methoden der kollektiven und auch der individuellen Risikotheorie nur möglich über die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens. Wegen der auftretenden Faltungspotenzen der Verteilungsfunktion der Schadenshöhe sind diese Formeln sehr kompliziert. Man ist daher gezwungen bei praktischen Berechnungen von Näherungsformeln auszugehen.

Die einzelnen Verfahren unterscheiden sich wesentlich in den über die Schadensverteilung gemachten Annahmen. Es wird entweder die Verteilungsfunktion unmittelbar aus den Beobachtungsergebnissen hergeleitet oder von bekannten Verteilungsgesetzen, wie z.B. dem Poisson-Gesetz, ausgegangen.

I. APPROXIMATION DER SCHADENSVERTEILUNG MITTELS EINER PEARSON-KURVE

Man geht von jährlichen Schadensquotienten (= Gesamtschaden: Versicherungssumme) in einem längeren Beobachtungszeitraum aus und approximiert deren Häufigkeitskurve durch eine Pearson-Kurve. Aus dieser näherungsweise berechneten Dichte ergibt sich dann durch Integration bis zu welcher Höhe bei vorgegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit ε der jährliche Gesamtschaden ansteigen kann. Wenn die berechnete Dichte mit $f(x)$ bezeichnet wird und die Sicherheit $1\text{-}10^{-s}$ betragen soll, wird ein Schadensquotient $r(s)$ gesucht, für den gilt

$$\int_0^{r(s)} f(x)dx < 1 - 10^{-s}.$$

Die Höhe der Schwankungsrückstellung ergibt sich durch Multiplikation der Abweichung vom Mittelwert b_0 mit der gesamten Versicherungssumme V

$$SR^I = (r(s) - b_0) \, . \, V$$

Diese Methode hat den Vorteil, dass die Beobachtungsergebnisse der betreffenden Versicherung genauestens berücksichtigt werden. Sie kann auch bei Sachversicherungszweigen mit grossen Schwankungen im jährlichen Gesamtschaden angewendet werden.

Das geschilderte Verfahren wurde erstmals bei Lange [4] *) erwähnt und teilweise durchgeführt. Es ist in der Arbeit von Campagne [2] ausführlich dargelegt. Die Werte $r(s)$ für $s = 2$ und $s = 3$ wurden darin für verschiedene Gesellschaften angegeben.

Es sei mit σ_p die beobachtete mittlere quadratische Abweichung der Schadensquotienten bezeichnet. Dann gibt

$$C_p = \frac{r(s) - b_0}{\sigma_p}$$

die Relation der zu erwartenden Schwankungen zu σ_p an. Campagne kommt bei seinen Berechnungen zu folgenden Ergebnissen

$$C_p \sim 3 \quad \text{für } s = 2,$$
$$C_p \sim 4{,}5 \quad \text{für } s = 3.$$

Das statistische Material stammt aus den Jahren 1916 bis 1943. Die Gesellschaften hatten Rückversicherungsverträge abgeschlossen. C_p bezieht sich daher auf den Selbstbehalt. Aus den Resultaten von Lange ergeben sich für C_p um ca. 40% höhere Werte. Dieser Unterschied dürfte auf die wesentlich gröbere Berechnungsmethode und auf die andere Bauweise in dem frühen Beobachtungszeitraum (ab 1883) zurückzuführen sein. Bei Untersuchungen an umfang-

*) Die in eckigen Klammern angeführten Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

reichem neuerem Material der Bayerischen Landesbrandversicherungsanstalt aus den Jahren 1930/31 bis 1954/55 ergab sich

$$C_p = 3{,}35 \text{ für } s = 2,$$
$$C_p = 4{,}94 \text{ für } s = 3.$$

Dabei ist zu beachten, dass kein Rückversicherungsvertrag vorlag, was fast immer eine Erhöhung der Werte C_p zur Folge haben wird.

Ein weiteres Verfahren zur Ermittlung von $f(x)$ wird bei K. Anft [1] angegeben.

Aus den Ergebnissen für C_p, kann abgelesen werden, dass bei der Verteilung der Schadensquotienten grössere Schwankungen auftreten als bei einer normal verteilten Variablen. Die entsprechenden Grössen sind

$$C_g = 2{,}3 \text{ für } s = 2,$$
$$C_g = 3{,}1 \text{ für } s = 3.$$

II. Verwendung bekannter Verteilungsgesetze

a) *Methode von Campagne*

Campagne, de Jongh und Smit haben in ihrer Arbeit ausser der bereits erwähnten Methode noch ein 2. Verfahren zur Berechnung der Schwankungsrückstellung angegeben, das von dem Poisson-Gesetz ausgeht. Bei diesem Verfahren wurden Gruppen ungefähr gleichen Risikos gebildet und die Schwankungsrückstellung für den Gesamtbestand aus den Schwankungsrückstellungen für die verschiedenen Gruppen zusammengesetzt. Die Auswirkung der Abhängigkeit der einzelnen versicherten Objekte wird durch einen Korrekturfaktor in die Berechnung miteinbezogen.

Campagne hat zuerst die exakte Formel für die Verteilungsfunktion $W(X)$ des Gesamtschadens — bezogen auf eine Risikogruppe — abgeleitet. Um für die praktische Anwendung eine Formel ohne Faltungspotenzen zu erhalten, ging Campagne einerseits von einem durchschnittlich versicherten Kapital aus und ersetzte andererseits die Anzahl der Teilschäden durch eine entsprechend kleinere Anzahl von Totalschäden mit insgesamt der gleichen Schadenshöhe. Mit diesen Vereinfachungen ergibt sich für $W(X)$ eine Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\tilde{N}\tilde{p}$, der gleich dem Erwartungswert des Schadens ist. Bei vorgegebener Sicherheit ε lässt sich dann über die Poisson-Verteilung eine maximal zu erwartende Anzahl von Totalschäden errechnen. Die Schwankungsrückstellung ergibt sich durch Multiplikationen mit dem durchschnittlich versicherten Kapital $\overline{w}$.

Um zu einer kontinuierlichen und leicht berechenbaren Verteilung zu gelangen, wurde die Poisson-Verteilung durch eine Gauss-Verteilung mit gleichem Erwartungswert, gleicher Streuung und Korrekturglied für die Schiefe approximiert. Für die Schwankungsrückstellung für eine Risikogruppe erhält man somit bei vorgegebenem $\varepsilon = 1 - 10^{-s}$

$$\tilde{SR} = (\alpha\,(s) + \beta\,(s)\,\sqrt{\tilde{N}\tilde{p}})\,.\,\overline{w},$$

wobei $\tilde{N}$ = Anzahl der Objekte in der Risikogruppe

$\tilde{p}$ = Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines Totalschadens pro Objekt im Jahr

$$\alpha\,(s) = 0{,}65;\ \beta\,(s) = 2{,}326 \text{ für } s = 2$$

$$\alpha\,(s) = 1{,}20;\ \beta\,(s) = 3{,}090 \text{ für } s = 3.$$

Um die Auswirkungen der Vereinfachungen aufzuheben, hat Campagne Faktoren ermittelt, mit denen $\tilde{SR}$ zu multiplizieren ist. Die Abweichung des Produktes aller Korrekturfaktoren von 1 hängt wesentlich von dem vorliegenden Rückversicherungsvertrag ab.

Die Schwankungsrückstellung für den gesamten Versicherungsbestand wird mit Hilfe von Korrelationskoeffizienten, die die Abhängigkeit der Risikogruppen angeben und gleich 0 oder 1 sind, berechnet.

$$SR^{II} = \sqrt{\sum_{\nu\mu} \rho_{\nu\mu}\,\tilde{SR}_\nu\,.\,\tilde{SR}_\mu},$$

wobei $\tilde{SR}_\nu$ = Reserve für die ν-te Risikogruppe

$\rho_{\nu\mu}$ = Korrelationskoeffizienten.

Diese Formel wurde von Campagne bei mehreren Gesellschaften angewendet und führte, auch ohne Korrekturfaktoren, zu guten Ergebnissen. Sie stimmten ungefähr mit den Resultaten nach der unter I angegebenen Methode über die Pearson-Verteilung überein.

Dies bedeutet eine nachträgliche Rechtfertigung der gemachten Annahmen und bestätigt die Anwendbarkeit des Poisson-Gesetzes bei Gruppen gleichen Risikos.

Man wird sich nun dafür interessieren, ob es möglich ist, die Formel $\tilde{S}\tilde{R}$ auf den Gesamtbestand anzuwenden und auf die Einteilung in Gruppen gleichen Risikos zu verzichten. In diesem Zusammenhang ist in erster Linie zu klären, ob das Poisson-Gesetz dann noch gilt. Diese Fragestellung ist auch deshalb von Wichtigkeit, weil in der kollektiven Risikotheorie fast immer von einer Poisson-Verteilung für die insgesamt auftretenden Schadensfälle ausgegangen wird. Nur in einzelnen Arbeiten werden Verallgemeinerungen, die eine Abhängigkeit der Elemente berücksichtigen, angesetzt. R. Lang kam in seinem Artikel [3] zu dem Resultat, dass das Poisson-Gesetz bei dem Beobachtungsmaterial eines Lebensversicherungsunternehmens galt. Bei der Brandversicherung liegen jedoch, wie aus den Faktoren C_p zu schliessen ist, andere Verhältnisse vor.

Auf Grund des statistischen Materials der Bayerischen Landesbrandversicherungsanstalt aus den Jahren 1935/36 bis 1954/55 (ohne Rückversicherungsvertrag) wurde ein χ^2-Test über die Gültigkeit des Poisson-Gesetzes durchgeführt. Für die Schadenshäufigkeit ergibt sich als bester Schätzwert nach dem Maximum-Likelihood-Verfahren der Mittelwert der Beobachtungsergebnisse. Für die folgende, willkürliche Klasseneinteilung sind die beobachteten und berechneten theoretischen Häufigkeiten aufgeführt.

Klasse	Anzahl der Schadensfälle *)	Häufigkeiten beob.	Häufigkeiten nach Poisson
1	0 — 249	3	0,14
2	250 — 274	4	3,38
3	275 — 299	5	10,60
4	300 — 324	5	5,40
5	325 — ...	3	0,48
		20	20,00

Wie bereits aus dieser Zusammenstellung ersichtlich, ist die Schwankungsbreite bei den beobachteten Werten viel grösser. Für χ^2 mit 3 Freiheitsgraden (wegen des Schätzwertes) ergibt sich ein

*) Umgerechnet in Totalschäden.

https://doi.org/10.1017/S0515036100009727 Published online by Cambridge University Press

Wert weit über der Sicherheitsschranke, auch bei geringer Irrtumswahrscheinlichkeit. Die Hypothese — Gültigkeit der Poisson-Verteilung — ist also zu verwerfen.

Daraus folgt, dass die Unterteilung in Gruppen gleichen Risikos notwendig ist. Leider stand mir kein ausreichendes Beobachtungsmaterial zur Verfügung, um die Gültigkeit in diesem Fall überprüfen zu können. Nach den praktischen Erfahrungen von Campagne scheint dies jedoch richtig zu sein.

b) *Methode von Tosberg*

Tosberg geht in seinem Artikel über die Schwankungsrückstellung [6] von der Annahme aus, dass innerhalb einer Gruppe von Objekten gleichen Risikos für die Anzahl der auftretenden Schadensfälle das sog. „Bernoullische Theorem" gilt. Eine Integraltransformation ergibt, dass dies gleichbedeutend ist mit der Behauptung, dass die Anzahl der Schadensfälle normal verteilt ist. Tosberg machte nun die weitere Annahme, dass durch geeignete Wahl des Zeichnungsmaximums und des Selbstbehalts das gesamte Versicherungsgeschäft so gleichmässig gestaltet werden kann, dass das Bernoullische Theorem auf den Gesamtbestand anwendbar ist. Die Schwankungen beim Gesamtschaden werden dann errechnet durch Multiplikation der anzahlmässigen Schwankungen mit der durchschnittlichen Schadenshöhe $\bar{S}$ pro Schadensfall. Es werden also Schwankungen in der Schadenshöhe nicht berücksichtigt.

Um mit den übrigen Resultaten vergleichen zu können, ist hier, abweichend von Tosberg, der mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit ε fast gleich 1 rechnet, wieder von $\varepsilon = 1 - 10^{-s}$ ausgegangen worden. Für die Schwankungsrückstellung ergibt sich mit dem bekannten $\beta(s)$ die Formel

$$SR^{III} = \beta(s) \cdot \sqrt{Np_0} \cdot \bar{S}$$

wobei N = Anzahl der Objekte

p_0 = Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Schadensfalles pro Objekt, ev. Teilschaden (= Feuerausbruchswahrscheinlichkeit).

Die Wurzel $\sqrt{1 - p_0}$ liegt sehr nahe bei 1 und wurde deshalb vernachlässigt.

Es ist zu beachten, dass von der Feuerausbruchswahrscheinlichkeit ausgegangen wird. Erst Ausbruchswahrscheinlichkeit und Ausbreitungswahrscheinlichkeit (innerhalb des Objekts) ergeben zusammen die in anderen Arbeiten verwendete Schadenswahrscheinlichkeit p (= Nettoprämie für versichertes Kapital 1), deren Verteilung bereits besprochen wurde und sicher nicht normal ist. Es gilt $p_0 \geq p$. Das Gleichheitszeichen ist richtig, wenn tatsächlich nur Totalschäden auftreten.

Im folgenden soll einerseits die Verteilung der Schadensausbruchswahrscheinlichkeit und andererseits die Brauchbarkeit der Formel SR^{III} untersucht werden.

In älteren Arbeiten ist darauf hingewiesen, dass verschiedene Untersuchungen die Gültigkeit der Gauss-Verteilung bestätigt hätten. Auf ähnliche Weise wie bei der Poisson-Verteilung wurde der χ^2-Test herangezogen. Das Beobachtungsmaterial stammte wiederum von der Bayerischen Landesbrandversicherungsanstalt und zwar aus den Jahren 1949/50 mit 1958/59. Für χ^2 mit 6 Freiheitsgraden ergab sich bei der gewählten Klasseneinteilung der Wert 2,96, bei anderen Einteilungen sogar noch niedrigere Werte. Die Hypothese — Gültigkeit der Gauss-Verteilung — ist also nicht zu verwerfen. Daraus folgt aber noch nicht die Anwendbarkeit von $\mathrm{SR}^{\mathrm{III}}$; denn in die Berechnung gehen ja nur die Schwankungen einer annähernd normal verteilten Grösse ein, nicht jedoch Schwankungen von dem Ausmass, wie sie bei der Schadenswahrscheinlichkeit festgestellt wurden. Die Abweichungen vom Mittelwert treten also, wie aus dem Ergebnis dieses Tests folgt, bei der Ausbreitungswahrscheinlichkeit auf (siehe auch Riebesell [5]).

Um zu überprüfen, zu welchen Rückstellungen die Formel von Tosberg führt, kann man sie mit der Formel $\tilde{SR}$ für eine Risikogruppe nach Campagne vergleichen. Wenn man diese auf den Gesamtbestand anwendet und beachtet, dass $p_0 \geq p$, erhält man die Abschätzung

$$SR^{\mathrm{III}} < \tilde{SR}.$$

Wie sich unter b) ergeben hatte, führt die Anwendung von $\tilde{SR}$ auf den Gesamtbestand zu nicht ausreichenden Reserven. Die Formel von Tosberg ergibt also eine viel zu geringe Rückstellung.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass für die Berechnung der Schwankungsrückstellung entweder Formel SR^{I} oder

SR^{II} in Frage kommt. Die Wahl des Verfahrens hängt von der speziellen Struktur des Versicherungsbestandes und dem vorliegenden Beobachtungsmaterial ab.

Literaturverzeichnis

[1] Anft, K.: *Über die Bestimmung der Schwankungsreserve in der Feuer- und in der Hagelversicherung*, Inaugural-Dissertation, Jena 1938.

[2] Campagne, C., de Jongh, B. H., Smit, J. N.: *Contribution to the mathematical theory of the stabilization reserve and the net retention in fire insurance*, 's-Gravenhage 1947. (In der vorliegenden Arbeit ist meist nur der Name Campagne erwähnt).

[3] Lang, R.: „Die Untersuchung der Zufallsschwankungen in den Jahresergebnissen einer Versicherungsgesellschaft mit Hilfe der kollektiven Risikotheorie", *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, Band I, Heft 3.

[4] Lange, C.: „Untersuchungen über die jährlichen Schwankungen der Schadensquotienten in der Lebensversicherung und in der Feuerversicherung", *Wirtschaft und Recht der Versicherung*, Nr. 2, 1932.

[5] Riebesell, P.: „Einführung in die Sachversicherungsmathematik", *Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft*, Heft 56, Berlin 1936.

[6] Tosberg, A.: „Versuch einer mathematischen Lösung des Problems 'Schwankungsrückstellung' ", *Steuer und Wirtschaft* 1959, Heft 12.

https://doi.org/10.1017/S0515036100009727 Published online by Cambridge University Press