Can. J. Math., Vol. XXIX, No. 1, 1977, pp. 107–110

SUR LES GROUPES QUASI-PURS-PROJECTIFS TORSIONS

KHALID BENABDALLAH ET ROBERT BRADLEY

Dans ce travail, nous établissons une caractérisation complète des groupes quasi-purs-projectifs torsions résolvant ainsi le problème 17 de L. Fuchs dans le cas important des groupes torsions. Les groupes quasi-purs-injectifs ont été caractérisés dans le cas torsion par *K.* Benabdallah et A. Laroche dans [**1**].

Les notations utilisées sont, sauf avis contraire, celles de [**2**] et tous les groupes considérés sont abéliens. Notons aussi que suivant [**3**], un groupe primaire réduit est séparable si et seulement si il ne possède pas d'élément non nul de hauteur infinie.

1. Définition et propriétés élémentaires.

Comme l'a suggéré L. Fuchs [**2**, p. 134], on considère la classe des groupes quasi-purs-projectifs, définis de la façon suivante:

Définition. Un groupe G est dit *quasi-pur-projectif* si, pour tout sous-groupe pur H de G et pour tout homomorphisme f: $G \longrightarrow G/H$, il existe un endomorphisme φ: $G \longrightarrow G$ tel que $\nu_H \cdot \varphi = f$ où ν_H désigne l'épimorphisme canonique ν_H: $G \longrightarrow G/H$. Nous utiliserons l'abréviation q.p.p. dans ce qui suit.

On a évidemment que tout groupe quasi-projectif est q.p.p. et que tout groupe pur-projectif est q.p.p.. Les résultats généraux suivants dont nous omettons les preuves nous serons utiles par la suite.

Proposition 1.1. *Tout facteur direct d'un groupe q.p.p. est aussi q.p.p.*

Proposition 1.2. *Tout groupe divisible est q.p.p.*

A ce stade, il est naturel de se demander si on peut réduire l'étude des groupes q.p.p. aux groupes réduits, c'est-à-dire, si $G = D \oplus R$ où D est divisible et R q.p.p. réduit, est-ce que G est q.p.p.? La réponse est en général négative (voir théorème 3.1).

Proposition 1.3. *Soit G un groupe q.p.p.. Si H est un sous-groupe pur complètement invariant de G, alors G/H est q.p.p.*

On obtient ainsi que si G est q.p.p. mixte et si T est sa partie torsion, alors G/T est q.p.p. sans torsion.

Grâce à la proposition suivante, dont la preuve est standard, nous réduirons l'étude des groupes q.p.p. torsions à celle des p-groupes q.p.p.

Reçu le 15 mars, 1976 et sous forme revisée, le 30 juillet 1976. Ce travail est subventionné par le Conseil National de Recherche du Canada, fond A5591.

https://doi.org/10.4153/CJM-1977-010-4 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 1.4. *Un groupe torsion est q.p.p. si, et seulement si, chacune de ses parties primaires est q.p.p.*

2. La propriété P. Tous les groupes considérés dans cette section sont p-primaires, pour un nombre premier p fixe. Dans ce cas, nous pouvons définir une notion généralisant la quasi-pur-projectivité. Ainsi, nous dirons qu'un p-groupe G possède *la propriété P* si étant donné un sous-groupe de base B de G et un endomorphisme idempotent φ de G/B, il existe un endomorphisme θ de G tel que $\nu_B \cdot \theta = \varphi \cdot \nu_B$ où ν_B désigne la projection canonique ν_B: $G \rightarrow G/B$. Il est alors évident qu'un groupe q.p.p. vérifie la propriété P.

Les groupes réduits possédant la propriété P sont séparables. Pour démontrer ceci, nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 2.1. *Si G est un p-groupe réduit possédant la propriété P, si B est un sous-groupe de base de G et si $G/B = (H/B) \oplus (K/B)$, alors $G^1 = K^1 \oplus H^1$.*

Preuve. Soit φ: $G/B \rightarrow G/B$ la projection canonique de G/B sur H/B. Alors $\varphi^2 = \varphi$ et donc il existe un endomorphisme θ: $G \rightarrow G$ tel que $\nu_B \cdot \theta = \varphi \cdot \nu_B$ où ν_B désigne l'épimorphisme canonique ν_B: $G \rightarrow G/B$.

Alors $\nu_B(\theta^2 - \theta) = (\varphi^2 - \varphi) \cdot \nu_B = 0$ et donc $(\theta^2 - \theta)(G) \leqq B$. En particulier $(\theta^2 - \theta)(G^1) \leqq B^1 = 0$ et donc $G^1 \leqq \ker\ (\theta^2 - \theta)$. Par conséquent, si $\bar{\theta}$: $G^1 \rightarrow G^1$ est la restriction de θ à G^1, alors $\bar{\theta}^2 = \bar{\theta}$. Donc $G^1 = \bar{\theta}(G^1) \oplus \ker \bar{\theta}$.

Mais $\bar{\theta}(G^1) = \theta(G^1) \leqq H^1$, $\ker \bar{\theta} \leqq K^1$ et $H^1 \cap K^1 \leqq B^1 = 0$. Donc $G^1 = H^1 \oplus K^1$.

THÉORÈME 2.2. *Si G est un p-groupe réduit possédant la propriété P, alors G est séparable.*

Preuve. On suppose le contraire. Soit x un élément non nul de G^1. Soit également H un G^1 — haut. Alors H est pur dans G, G/H est divisible et $G \neq H$.

Comme G est réduit, H doit être non borné. Par conséquent, par [**2**, Corollaire 35.4], il existe un sous-groupe de base B de H différent de H. Alors $B[p] \neq H[p]$ car B est pur dans H.

Soit $h \in H[p]/B[p]$. On vérifie facilement que $(\langle x + h\rangle + B) \cap H = B$. Donc $(\langle x + h\rangle + B)/B \cap H/B = 0$. Soit K/B un H/B — haut contenant $(\langle x + h\rangle + B)/B$. Alors, comme H/B est divisible, $G/B = H/B \oplus K/B$.

Par le lemme 2.1, on obtient donc que $G^1 = H^1 \oplus K^1$. Comme $0 = H \cap G^1 \geqq H^1$, on obtient que $G^1 = K^1$. Donc $x \in G^1 = K^1 \leqq K$, $x + h \in K$ et donc $h \in K$. Mais $h \in H$ d'où $h \in K \cap H = B$. Ceci contredit le choix de h. Donc G est séparable.

On obtient par conséquent le résultat suivant:

THÉORÈME 2.3. *Si G est un p-groupe q.p.p. réduit, alors G est séparable.*

THÉORÈME 2.4. *Soit G un p-groupe réduit possédant la propriété P et soit B*

https://doi.org/10.4153/CJM-1977-010-4 Published online by Cambridge University Press

un sous-groupe de base de G tel que rang G/B est infini. Alors card (End G/B) $\leqq$ card (End B).

Preuve. Soit φ: $G/B \rightarrow G/B$ un endomorphisme idempotent. Alors $\varphi \cdot \nu_B : G \rightarrow G/B$ et il existe un endomorphisme θ: $G \rightarrow G$ tel que $\nu_B \cdot \theta = \varphi \cdot \nu_B$ où ν_B est l'épimorphisme canonique ν_B: $G \rightarrow G/B$. Si A désigne l'ensemble des endomorphismes idempotents de G/B, comme G/B est divisible, alors card A = card End G/B. On définit alors l'application f: $A \rightarrow$ End B par $f(\varphi) = \theta|_B$ car $\theta(B) \leqq B$. Supposons que $f(\varphi') = \theta'|B = \theta|B$. Alors $\theta = \theta'$ par ([**2**, proposition 34.1]), d'où $\nu_B \cdot \theta = \nu_B \cdot \theta'$, $\varphi \cdot \nu_B = \varphi' \cdot \nu_B$ et $\varphi = \varphi'$ car ν_B est un épimorphisme. Donc f est une injection ce qui implique le résultat.

THÉORÈME 2.5. *Si G est un p-groupe réduit vérifiant la propriété P et si B est un sous-groupe de base de G, alors B est de même rang que G en supposant vraie l'hypothèse généralisée du continu.*

Preuve. Supposons le contraire. Alors le rang de B est infini. Notons le rang de B par α et celui de G par β. Alors $G/B \simeq \bigoplus_\beta \mathbf{Z}(p^\infty)$ d'où card End $(G/B) = 2^\beta$. De même, rang $B = \alpha$ implique que card End $B = 2^\alpha$. On obtient donc $\alpha < \beta < 2^\beta \leqq 2^\alpha$ par le théorème 2.4. Ceci contredit l'hypothèse généralisée du continu. Donc rang G = rang B.

3. Les groupes quasi-purs-projectifs torsions. Nous caractérisons d'abord les p-groupes q.p.p. non réduits.

THÉORÈME 3.1. *Un p-groupe non réduit G est q.p.p. si, et seulement si, G est somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe borné.*

Preuve. Si G est somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe borné, tout sous-groupe pur est facteur direct et donc G est q.p.p.

Inversement, supposons que G soit q.p.p. non réduit. La proposition 1.1. nous permet de nous réduire au cas où $G = D \oplus R$ avec $D \simeq \mathbf{Z}(p^\infty)$ et R réduit.

Supposons que R soit non borné. Alors, il existe un sous-groupe de base propre B de R ([**2**, Théorème 35.3]). Si $R/B \not\simeq \mathbf{Z}(p^\infty)$ alors $R/B = K/B \oplus H/B$ où $K/B \simeq \mathbf{Z}(p^\infty)$. Alors $R/H \simeq \mathbf{Z}(p^\infty)$. Mais, H étant pur dans G, $L = D \oplus H$ est pur dans G et $G/L \simeq \mathbf{Z}(p^\infty) \simeq D$.

Définissons f: $G \rightarrow G/L$ par $f|_D$: $D \rightarrow G/L$ l'isomorphisme existant par ce qui précède et $f|_R$: $R \rightarrow G/L$ l'homomorphisme zéro. G étant q.p.p., il existe un endomorphisme φ: $G \rightarrow G$ tel que $\nu_L \cdot \varphi = f$ où ν_L est la projection canonique ν_L: $G \rightarrow G/L$. Mais alors $G/L = f(D) = \nu_L \cdot \varphi(D) \leqq \nu_L(D) = 0$ ce qui est une contradiction. Donc R est borné.

Nous passons maintenant au cas réduit. L'hypothèse généralisée du continu jouera un rôle important dans ce qui suit.

LEMME 3.2. *Si G est un p-groupe réduit q.p.p. et s'il existe des sous-groupes de base B et K de G tels que $B \leqq K$ et tels que le rang de K/B soit égal à celui de G, alors G est somme directe de groupes cycliques.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1977-010-4 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Comme K/B est divisible, $G/B = K/B \oplus R/B$. De plus, rang $G =$ rang K/B implique qu'il existe un monomorphisme $f: G \to K/B$ car K/B est divisible. Alors, il existe un endomorphisme $\varphi: G \to G$ tel que $\nu_B \cdot \varphi = f$ où ν_B est la projection canonique $\nu_B: G \to G/B$. Alors φ est un monomorphisme tel que $\varphi(G) \leqq K$. K étant une somme directe de groupes cycliques et G étant isomorphe à $\varphi(G)$, on obtient le résultat.

LEMME 3.3. *Soit G un p-groupe réduit q.p.p. et supposons que le rang final de G soit égal au rang final d'un de ses sous-groupes de base. Alors G est somme directe de groupes cycliques.*

Preuve. Soit B un sous-groupe de base de G de même rang final que G. On écrit $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ où $B_n \simeq \bigoplus_{J_n} \mathbf{Z}(p^n)$. Soit $m \in \mathbf{N}$ suffisamment grand tel que rang $p^m B =$ rang final B et rang $p^m G =$ rang final G.

Alors $G = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \oplus G'$, $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \oplus B'$ où B' est un sous-groupe de base de G' et où rang $B' =$ rang final B', rang $G' =$ rang final G'. Comme G' est aussi q.p.p. et $B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ est somme directe de groupes cycliques, on peut supposer que rang $G =$ rang final G et rang $B =$ rang final B.

Par ([**2**, Théorème 35.6]), il existe un sous-groupe de base K de B tel que rang $B/K =$ rang final B. Alors rang $B/K =$ rang G et donc G est somme directe de groupes cycliques par le lemme précédent.

On obtient alors la caractérisation suivante:

THÉORÈME 3.4. *Si G est un p-groupe réduit q.p.p., alors G est somme directe de groupes cycliques en supposant vraie l'hypothèse généralisée du continu.*

Preuve. Soit B un sous-groupe de base de G. Comme dans le lemme précédent, on peut supposer que rang $B =$ rang final B et rang $G =$ rang final G. Donc, par le théorème 2.5, rang final $B =$ rang final G. Le lemme 3.3 nous donne alors le résultat.

Pour résumer, nous avons:

THÉORÈME 3.5. *Si G est un groupe torsion et si on suppose vraie l'hypothèse généralisée du continu, alors G est q.p.p. si et seulement si Gp est soit somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe borné, soit somme directe de groupes cycliques et ce pour tout nombre premier p. De plus, indépendamment de l'hypothèse généralisée du continu, les p-groupes q.p.p. réduits sont séparables.*

BIBLIOGRAPHIE

1. K. Benabdallah et A. Laroche, *Sur le problème 17 de L. Fuchs*, à paraître, Annales des Sciences Mathématiques du Qué. *1* (1976).

2. L. Fuchs, *Infinite abelian groups, vol. I* (Academic Press, New York, 1970).

3. ——— *Infinite abelian groups, vol. II* (Academic Press, New York, 1973).

Université de Montréal,
Montréal, Québec

https://doi.org/10.4153/CJM-1977-010-4 Published online by Cambridge University Press