Can. J. Math., Vol. XXXIV, No. 4, 1982, pp. 900–909

L'ENVELOPPE CONJUGUEE D'UN DEMI-GROUPE INVERSE A METACENTRE IDEMPOTENT

FRANCIS PASTIJN

1. Introduction et rappel des definitions. Nous renvoyons le lecteur à [**4**] pour toutes les définitions non expliquées ci-dessous.

Un *demi-groupe inverse* S est un demi-groupe pour lequel pour tout élément $a \in S$ il existe un seul inverse a^{-1}, c'est-à-dire un élément a^{-1} qui satisfait aux conditions $aa^{-1}a = a$ et $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$. Une application $\lambda : S \rightarrow S, x \rightarrow \lambda x$ est appelée une *translation à gauche* si $\lambda(xy) = (\lambda x)y$; une application $\rho : S \rightarrow S, x \rightarrow x\rho$ est dite *translation à droite* si $(xy)\rho = x(y\rho)$. Les translations à gauche (à droite) forment un demi-groupe $\Lambda(S)$ $[P(S)]$. L'ensemble

$$\Omega(S) = \{(\lambda, \rho) \in \Lambda(S) \times \mathrm{P}(S) | x(\lambda y) = (x\rho)y \text{ pour tout } x, y \in S\}$$

forme un sous-demi-groupe de $\Lambda(S) \times \mathrm{P}(S)$ qui est appelé l'*enveloppe de translations* de S. Si pour tout $a \in S$ on définit $\lambda_a : S \rightarrow S$, $x \rightarrow ax$, et $\rho_a : S \rightarrow S$, $x \rightarrow xa$, on appelle

$$\Pi(S) = \{(\lambda_a, \rho_a) | a \in S\} \subseteq \Omega(S)$$

la *partie interne* de $\Omega(S)$. L'application $S \rightarrow \Pi(S)$, $a \rightarrow (\lambda_a, \rho_a)$ est un isomorphisme, et $\Omega(S)$ est un demi-groupe inverse qui contient $\Pi(S)$ comme idéal ([**4**], Chapitre V).

L'ensemble des idempotents E_S d'un demi-groupe inverse S forme un demi-treillis. L'ensemble de tous les isomorphismes entre les sous-demigroupes de S ayant la forme eSe, $e \in E_S$, est désigné par $\Phi(S)$, et $\Phi(S)$ constitue un demi-groupe inverse (pour la composition de transformations partielles) que l'on appelle *l'enveloppe normale* de S [**5**]. D'autre part, l'ensemble de tous les isomorphismes entre les sous-demi-groupes de S qui sont de la forme $\lambda S\rho$, $(\lambda, \rho) \in E_{\Omega(S)}$, constitue un demi-groupe inverse $\Psi(S)$ (de nouveau pour la composition de transformations partielles) que l'on appelle l'*enveloppe conjuguée* de S; $\Psi(S)$ est un demi-groupe inverse qui contient $\Phi(S)$ comme sous-demi-groupe [**6**].

Soit S un demi-groupe inverse et K un sous-demi-groupe inverse de S. On dit que K est *auto-conjugué* dans S si $a^{-1}Ka \subseteq K$ pour tout $a \in S$, et dans ce cas on appelle S une *extension conjuguée* de K. Si en outre K est un *sous-demi-groupe plein* de S (c'est-à-dire $E_K = E_S$), on dira que K est un *sous-demi-groupe normal* de S, et que S est une *extension normale*

Reçu le 20 mars 1981.

de K. Nous remarquons que tout idéal K d'un demi-groupe inverse S est auto-conjugué dans S; alors S sera dit une *extension idéale* de K. Si S est une extension (normale, conjuguée ou idéale) de K, nous dirons que S est une *extension essentielle* de K si la seule congruence sur S dont la restriction à K est la congruence identique, est la congruence identique sur S. L'enveloppe de translations $\Omega(S)$ est une *extension idéale essentielle maximale* (dans le sens de III.5 de [**4**]) de $\Pi(S)$ $(\cong S)$. Pour tout $a \in S$, θ^a désignera l'isomorphisme

$$\theta^a : aSa^{-1} \rightarrow a^{-1}Sa,\ x \rightarrow a^{-1}xa.$$

Alors $\Theta : S \rightarrow \Psi(S)$, $a \rightarrow \theta^a$ est un homomorphisme qui sépare les idempotents de S, tel que

$$\begin{aligned} M(S) &= \{a \in S | aa^{-1}xa = axa^{-1}a \text{ pour tout } x \in S\} \\ &= \{a \in S | \Theta(a) \in E_{\Psi(S)}\} \end{aligned}$$

[**5**]. L'ensemble $M(S)$ est appelé le *métacentre* de S. On vérifie sans peine que Θ est injectif si et seulement si $M(S)$ se réduit à E_S et, si celà est le cas, nous dirons que S est un demi-groupe inverse *à métacentre idempotent*. Si S est un demi-groupe inverse à métacentre idempotent, alors $\Psi(S)$ [$\Phi(S)$] est une extension conjuguée [normale] essentielle maximale de $\Theta(S)$ $(\cong S)$ [**5**] [**6**]. D'autre part, pour un demi-groupe inverse S il existe une extension conjuguée [normale] essentielle maximale si et seulement si le métacentre $M(S)$ est idempotent [**2**].

L'objet de cette note est d'établir un rapport entre l'enveloppe de translations, l'enveloppe normale et l'enveloppe conjuguée dans le cas d'un demi-groupe inverse à métacentre idempotent.

2. L'immersion dans l'enveloppe de translations de l'enveloppe normale.

LEMME 2.1. *L'enveloppe normale d'un demi-groupe inverse est un idéal de l'enveloppe conjuguée.*

Démonstration. Soit

$$\psi : \lambda S\rho \rightarrow \lambda' S\rho', \quad (\lambda, \rho), (\lambda', \rho') \in E_{\Omega(S)},$$

un élément quelconque de l'enveloppe conjuguée $\Psi(S)$ du demi-groupe inverse S, et soit

$$\phi : eSe \rightarrow fSf, \quad e, f \in E_S,$$

un élément quelconque de l'enveloppe normale $\Phi(S)$ de S. Il est clair que $\psi\phi$ appartient au demi-groupe $\Psi(S)$. Le domaine de définition de $\psi\phi$ est

$$\operatorname{dom} \psi\phi = (\lambda' S\rho' \cap eSe)\psi^{-1},$$

tandis que l'image de $\psi\phi$ est

$$\text{im } \psi\phi = (\lambda' S\rho' \cap eSe)\phi.$$

Considérons l'ensemble $\lambda' S\rho' = B'$. Il résulte du Théorème 3.7 de [**6**] que B' est un sous-demi-groupe inverse de S, et que le demi-treillis $E_{B'}$ des idempotents de B' forme un idéal rétracté du demi-treillis E_S. Si l'on dénote par $[e]$ l'idéal principal de E_S engendré par e, ceci implique que $E_{B'} \cap [e] = [\bar{e}]$ pour $\bar{e}$ dans E_S. Par conséquent, $\lambda' S\rho' \cap eSe$, étant l'intersection de sous-demi-groupes inverses de S, doit être un sous-demi-groupe inverse de S avec identité $\bar{e}$, et l'on voit que

$$\lambda' S\rho' \cap eSe \subseteq \bar{e}S\bar{e}.$$

D'autre part, comme $\bar{e} \in \lambda' S\rho'$, et donc $\bar{e} = \lambda'\bar{e} = \bar{e}\rho'$, on a

$$\bar{e}S\bar{e} = (\lambda'\bar{e})S(\bar{e}\rho') = \lambda'(\bar{e}S\bar{e})\rho' \subseteq \lambda' S\rho',$$

et

$$\bar{e}S\bar{e} \subseteq eSe,$$

d'où $\bar{e}S\bar{e} \subseteq \lambda' S\rho' \cap eSe$, et maintenant nous pouvons conclure que

$$\bar{e}S\bar{e} = \lambda' S\rho' \cap eSe.$$

Compte tenu du fait que ψ et ϕ sont des isomorphismes, il en résulte que

$$\text{dom } \psi\phi = (\bar{e}\psi^{-1})S(\bar{e}\psi^{-1}),$$
$$\text{im } \psi\phi = (\bar{e}\phi)S(\bar{e}\phi),$$

où $\bar{e}\psi^{-1}, \bar{e}\phi \in E_S$. Ceci donne $\psi\phi \in \Phi(S)$. De façon duale, on démontre que $\phi\psi \in \Phi(S)$. Par conséquent $\Phi(S)$ est un idéal de $\Psi(S)$.

Notons que le lemme précédent améliore le résultat 4.7 de [**6**]. Maintenant, il est évident que $\Phi(S)$ est auto-conjugué dans $\Psi(S)$, et que $\Phi(S)$ constitue le plus grand sous-demi-groupe inverse de $\Psi(S)$ qui contient $\Theta(S)$ comme un sous-demi-groupe plein.

Nous conservons toutes les notations introduites jusqu'à présent. Soit ψ un élément de $\Psi(S)$, et considérons les applications

$$\lambda^\psi : \Phi(S) \to \Phi(S), \phi \to \psi\phi,$$
$$\rho^\psi : \Phi(S) \to \Phi(S), \phi \to \phi\psi.$$

Alors

$$\tau : \Psi(S) \to \Omega(\Phi(S)), \psi \to (\lambda^\psi, \rho^\psi)$$

est un homomorphisme de $\Psi(S)$ dans $\Omega(\Phi(S))$, et la restriction de τ à $\Phi(S)$ est un isomorphisme de $\Phi(S)$ sur $\Pi(\Phi(S))$, la partie interne de $\Omega(\Phi(S))$ ([**4**], Théorème III.1.12).

THEOREME 2.2. *Soit S un demi-groupe inverse. L'application*

$$\tau : \Psi(S) \rightarrow \Omega(\Phi(S)), \psi \rightarrow (\lambda^{\psi}, \rho^{\psi})$$

est un homomorphisme de $\Psi(S)$ sur un sous-demi-groupe plein de $\Omega(\Phi(S))$, et τ sépare les idempotents de $\Psi(S)$. Si S est un demi-groupe inverse à métacentre idempotent, alors τ est un isomorphisme de $\Psi(S)$ sur le plus grand sous-demi-groupe inverse de $\Omega(\Phi(S))$ qui contient $\Pi(\Theta(S))$ comme sous-demi-groupe inverse auto-conjugué.

Démonstration. Soit S un demi-groupe inverse quelconque, et soit ω un idempotent de $\Omega(\Phi(S))$. En vertu de [**4**] V.4.7.2 et [**3**], nous savons que $E_{\Pi(\Phi(S))} \cap [\omega]$ est un idéal rétracté de $E_{\Pi(\Phi(S))}$. Comme $\Theta : S \rightarrow \Phi(S)$, $a \rightarrow \theta^a$ est un homomorphisme qui sépare les idempotents de S, et parce que la restriction de τ à $E_{\Phi(S)}$ est un isomorphisme de $E_{\Phi(S)}$ sur $E_{\Pi(\Phi(S))}$, on voit que la restriction de $\Theta\tau$ à E_S est injectif. De plus, $\Theta(S)$ est plein dans $\Phi(S)$, ce qui entraîne que $E_{\Phi(S)} = E_{\Theta(S)}$ et $E_{\Pi(\Phi(S))} = E_{\Pi(\Theta(S))}$, et ceci nous permet de dire que la restriction de $\Theta\tau$ à E_S est un isomorphisme de E_S sur $E_{\Pi(\Phi(S))}$. Par suite, les idempotents de $\Pi(\Phi(S))$ sont de la forme $(\lambda_{\theta^e}, \rho_{\theta^e})$, $e \in E_S$, et

$$E_\omega = \{e \in E_S | (\lambda_{\theta^e}, \rho_{\theta^e}) \in [\omega]\}$$

est un idéal rétracté de E_S. Considérons $E_\omega S E_\omega$; on vérifie sans peine que $E_\omega S E_\omega$ est le plus grand sous-demi-groupe inverse de S qui contient E_ω comme demi-treillis d'idempotents. L'application

$$\lambda : S \rightarrow S, x \rightarrow \overline{xx^{-1}}x, \quad \text{où} \quad [\overline{xx^{-1}}] = [xx^{-1}] \cap E_\omega,$$

est une application idempotente de S sur $E_\omega S$. Soient x et y des éléments quelconques de S. Alors

$$\overline{xx^{-1}}(xy)(xy)^{-1} \in E_\omega \cap [(xy)(xy)^{-1}] = [\overline{(xy)(xy)^{-1}}]$$

implique que

$$\overline{xx^{-1}}(xy)(xy)^{-1} \leqq \overline{(xy)(xy)^{-1}};$$

d'autre part, $(xy)(xy)^{-1} \leqq xx^{-1}$ implique que $\overline{(xy)(xy)^{-1}} \leqq \overline{xx^{-1}}$, et par conséquent

$$\overline{(xy)(xy)^{-1}} \leqq \overline{xx^{-1}}(xy)(xy)^{-1}.$$

On obtient

$$\overline{(xy)(xy)^{-1}} = \overline{xx^{-1}}(xy)(xy)^{-1},$$

donc

$$\lambda(xy) = \overline{(xy)(xy)^{-1}}(xy) = \overline{xx^{-1}}(xy)(xy)^{-1}(xy) = \overline{xx^{-1}}xy = (\lambda x)y,$$

ce qui établit le fait que λ est une translation idempotente à gauche de S. De façon duale,

$$\rho : S \to S, x \to \overline{xx^{-1}x}, \quad \text{où} \quad [\overline{x^{-1}x}] = [x^{-1}x] \cap E_\omega,$$

est une translation idempotente à droite de S. De plus, pour tout $x, y \in S$ on a

$$[x^{-1}x] \cap E_\omega \cap [yy^{-1}] = [\overline{x^{-1}x}] \cap [yy^{-1}] = [x^{-1}x] \cap [\overline{yy^{-1}}]$$

et par suite,

$$\begin{aligned}(x\rho)y &= x((x^{-1}x)\rho)yy^{-1}y = x(\overline{x^{-1}x}(yy^{-1}))y = x(x^{-1}x)\overline{yy^{-1}})y \\ &= x((\lambda(yy^{-1}))y) = x(\lambda y);\end{aligned}$$

par conséquent $(\lambda, \rho) \in E_{\Omega(S)}$ et $\lambda S \rho = E_\omega S E_\omega$. Il en résulte que la transformation identique sur $E_\omega S E_\omega$ appartient à $\Psi(S)$. Soit ψ_ω cette transformation identique sur $E_\omega S E_\omega$. Nous remarquons que ψ_ω est déterminée par l'idéal rétracté E_ω de E_S. Soit e un idempotent quelconque de S. Il est clair que θ^e est la transformation identique sur eSe; on en déduit que $\psi_\omega\theta^e$ est la transformation identique sur $E_\omega S E_\omega \cap eSe = \bar{e}S\bar{e}$, où $[\bar{e}] = E_\omega \cap [e]$. Soit

$$\phi : eSe \to fSf, \quad e, f \in E_S,$$

un élément quelconque de $\Phi(S)$. Compte tenu du fait que $\theta^e \mathscr{R} \phi \mathscr{L} \theta^f$ dans $\Phi(S)$, on a

$$\psi_\omega\phi = \psi_\omega\theta^{\bar{e}}\phi = \theta^{\bar{e}}\phi, \quad \phi\psi_\omega = \phi\theta^f\psi_\omega = \phi\theta^{\bar{f}}.$$

Montrons que $\omega(\lambda_\phi, \rho_\phi) = (\psi_\omega\phi)\tau$ et $(\lambda_\phi, \rho_\phi)\omega = (\phi\psi_\omega)\tau$. En vertu de [**4**] III.1.11, nous avons

$$\begin{aligned}\omega(\lambda_\phi, \rho_\phi) &= \omega(\lambda_{\theta^e}, \rho_{\theta^e})(\lambda_\phi, \rho_\phi) = (\lambda_{\theta^{\bar{e}}}, \rho_{\theta^{\bar{e}}})(\lambda_\phi, \rho_\phi) \\ &= (\lambda_{\theta^{\bar{e}}\phi}, \rho_{\theta^{\bar{e}}\phi}) = (\theta^{\bar{e}}\phi)\tau = (\psi_\omega\phi)\tau,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\lambda_\phi, \rho_\phi)\omega &= (\lambda_\phi, \rho_\phi)(\lambda_{\theta^f}, \rho_{\theta^f})\omega = (\lambda_\phi, \rho_\phi)(\lambda_{\theta^{\bar{f}}}, \rho_{\theta^{\bar{f}}}) \\ &= (\lambda_{\phi\theta^{\bar{f}}}, \rho_{\phi\theta^{\bar{f}}}) = (\phi\theta^{\bar{f}})\tau = (\phi\psi_\omega)\tau.\end{aligned}$$

Ceci implique $\psi_\omega\tau = \omega$. Nous avons démontré que $\Psi(S)\tau$ est un sous-demi-groupe inverse plein de $\Omega(\Phi(S))$.

Soit ψ un idempotent de $\Psi(S)$, et $\psi\tau = \omega \in E_{\Omega(\Phi(S))}$. Afin de démontrer que la restriction de τ à $E_{\Psi(S)}$ est injectif, il nous suffit d'établir que $\psi = \psi_\omega$. Supposons que ψ est la transformation identique sur $\lambda' S \rho'$, $(\lambda', \rho') \in E_{\Omega(S)}$. On obtient

$$\begin{aligned}e \in E_\omega &\Leftrightarrow \omega(\lambda_{\theta^e}, \rho_{\theta^e}) = (\lambda_{\theta^e}, \rho_{\theta^e}) \Leftrightarrow (\psi\tau)(\theta^e\tau) = \theta^e\tau \Leftrightarrow \psi\theta^e = \theta^e \\ &\Leftrightarrow \theta^{\lambda' e \rho'} = \theta^e \quad \text{(par [6], Lemme 4.4)} \Leftrightarrow e = \lambda' e \rho' \Leftrightarrow e \in E_{\lambda' S \rho'},\end{aligned}$$

en vertu du fait que la restriction de Θ à E_S et la restriction de τ à $E_{\Theta(S)}$ sont des isomorphismes. Il résulte du Théorème 3.7 de [**6**] que

$$\lambda' S\rho' = E_{\lambda' S\rho'} S E_{\lambda' S\rho'}.$$

Comme nous avons vu ci-dessus que $E_\omega = E_{\lambda' S\rho'}$, nous pouvons dire que $E_\omega S E_\omega = \lambda' S\rho'$, et ceci montre que $\psi = \psi_\omega$. Or, l'homomorphisme τ sépare les idempotents de $\Psi(S)$.

Supposons maintenant que S est un demi-groupe inverse à métacentre idempotent. Il va de soi que $\tau\tau^{-1}$ est une congruence sur $\Psi(S)$ dont la restriction à $\Phi(S)$ doit être l'égalité. Dans ce cas $\Psi(S)$ est une extension conjuguée essentielle de $\Theta(S)$ [**6**], Théorème 5.3, ce qui entraîne que $\tau\tau^{-1}$ est l'égalité sur $\Psi(S)$, en d'autres mots, τ est injectif. Comme $\Psi(S)$ est une extension conjuguée essentielle maximale de $\Theta(S)$, il est évident que $\Psi(S)\tau$ est une extension conjuguée essentielle maximale de $\Pi(\Theta(S))$ ([**6**], Théorème 5.3). On peut vérifier qu'il existe un seul sous-demi-groupe inverse Ψ de $\Omega(\Phi(S))$ qui est le plus grand de tous les sous-demi-groupes inverses de $\Omega(\Phi(S))$ qui contiennent $\Pi(\Theta(S))$ comme sous-demi-groupe inverse auto-conjugué, et il va sans dire que $\Pi(\Theta(S)) \subseteq \Pi(\Phi(S)) \subseteq \Psi(S)\tau \subseteq \Psi$. Supposons que ρ est une congruence sur Ψ dont la restriction à $\Pi(\Theta(S))$ est l'égalité. Comme $\Psi(S)\tau$ est une extension essentielle de $\Pi(\Theta(S))$, il en résulte que la restriction à $\Psi(S)\tau$ de ρ est l'égalité, et, en particulier, que la restriction à $\Pi(\Phi(S))$ de ρ est l'égalité. D'après [**4**] III.5, Ψ est une extension idéale essentielle de $\Pi(\Phi(S))$, et on en déduit que ρ est l'égalité sur Ψ. Ceci démontre que Ψ est une extension conjuguée essentielle de $\Pi(\Theta(S))$ qui contient $\Psi(S)\tau$ comme sous-demi-groupe. En vertu du fait que $\Psi(S)\tau$ est une extension conjuguée essentielle maximale de $\Pi(\Theta(S))$, nous avons $\Psi = \Psi(S)\tau$, et ceci achève la démonstration du théorème.

Utilisant la terminologie de [**4**], on peut dire que le Théorème 2.2 caractérise le type de l'extension idéale $\Psi(S)$ de $\Phi(S)$ dans le cas d'un métacentre idempotent.

Exemple 2.3. Soit S un demi-groupe de Brandt qui peut être représenté par un demi-groupe de matrices de Rees $\mathscr{M}^0(I, G, I: \Delta)$ où $I = \{1, 2\}$ et $G = \{e, a\}$. On vérifie que la permutation

$$\psi : a_{11} \to a_{11},\ e_{11} \to e_{11},\ a_{22} \to a_{22},\ e_{22} \to e_{22},\ 0 \to 0$$
$$e_{12} \to a_{12},\ a_{12} \to e_{12},\ e_{21} \to a_{21},\ a_{21} \to e_{21}$$

est un automorphisme de S, et donc $\psi \in \Psi(S)$. Si l'on désigne par ι_S l'identité de $\Psi(S)$, on peut démontrer que $\iota_S\tau = \psi\tau$. Ceci prouve qu'en général l'homomorphisme τ du Théorème 2.2 n'est pas injectif, et que $\Psi(S)$ n'est pas nécessairement une extension essentielle de $\Theta(S)$.

COROLLAIRE 2.4. *Soit S un demi-treillis de groupes aux centres triviaux. Alors τ est un isomorphisme de $\Psi(S)$ sur $\Omega(\Phi(S))$.*

Démonstration. Il suffit d'établir que $\Pi(\Theta(S))$ est auto-conjugué dans $\Omega(\Phi(S))$. Supposons que $\theta^a\tau \in \Pi(\Theta(S))$ et $\omega \in \Omega(\Phi(S))$. D'abord, on a

$$(\theta^a\tau)^{-1}(\theta^a\tau) = (\theta^a\tau)(\theta^a\tau)^{-1},$$

ce qui implique que $\omega' = (\theta^a\tau)(\theta^a\tau)^{-1}\omega$ est l'inverse de

$$\omega'^{-1} = \omega^{-1}(\theta^a\tau)^{-1}(\theta^a\tau);$$

il est clair que $\omega', \omega'^{-1} \in \Pi(\Phi(S))$, parce que $\Pi(\Phi(S))$ est un idéal de $\Omega(\Phi(S))$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\omega^{-1}(\theta^a\tau)\omega &= \omega^{-1}(\theta^a\tau)(\theta^a\tau)^{-1}(\theta^a\tau)(\theta^a\tau)^{-1}(\theta^a\tau)\omega\\ &= \omega'^{-1}(\theta^a\tau)\omega' \in \Pi(\Theta(S)),\end{aligned}$$

comme $\Pi(\Theta(S))$ est un sous-demi-groupe normal de $\Pi(\Phi(S))$.

Si le demi-groupe inverse S du Corollaire 2.4 se réduit à un groupe, $\Psi(S) = \Phi(S)$ $(\cong \Omega(\Phi(S)))$ est exactement le groupe d'automorphismes de S. D'autre part, dans le cas d'un demi-treillis E, $\Phi(E)$ est le demi-groupe inverse de Munn T_E [**1**] qui est formé des isomorphismes entre les idéaux principaux de E, et l'on obtient:

COROLLAIRE 2.5. *L'enveloppe conjuguée $\Psi(E)$ d'un demi-treillis E est isomorphe à l'enveloppe de translations du demi-groupe de Munn T_E.*

Exemple 2.6. Soit S un demi-groupe inverse primitif qui est l'union 0-direct d'un demi-groupe de Brandt à 5 éléments, et d'un demi-treillis à 2 éléments. On vérifie sans peine que le métacentre de S est idempotent, et que dans ce cas l'homomorphisme τ du Théorème 2.2 n'est pas surjectif. Notre exemple démontre qu'une extension idéale d'une extension normale n'est pas nécessairement une extension conjuguée.

3. L'immersion dans l'enveloppe normale de l'enveloppe de translations. Supposons que S est un demi-groupe à métacentre idempotent. Pour tout $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$ nous définissons

$$\tau_{(\lambda,\rho)} : \lambda\lambda^{-1}S\rho\rho^{-1} \to \lambda^{-1}\lambda S\rho^{-1}\rho,\ x \to \lambda^{-1}x\rho$$

où $(\lambda^{-1}, \rho^{-1})$ est l'inverse unique de (λ, ρ) dans $\Omega(S)$. On peut démontrer que $\tau_{(\lambda,\rho)} \in \Psi(S)$, et que l'application

$$\delta : \Omega(S) \to \Psi(S),\ (\lambda, \rho) \to \tau_{(\lambda,\rho)}$$

est un isomorphisme de $\Omega(S)$ sur un sous-demi-groupe inverse plein $T(S)$ de $\Psi(S)$ ([**6**], Théorème 6.6 et Corollaire 6.8). Il résultera de la démonstration du lemme suivant que $T(S)$ est un sous-demi-groupe inverse normal de $\Psi(S)$.

LEMME 3.1. *Soit S un demi-groupe inverse à métacentre idempotent. Alors* *l'application* $\delta : \Omega(S) \to \Psi(S)$, $(\lambda, \rho) \to \tau_{(\lambda,\rho)}$ *est un isomorphisme de* $\Omega(S)$ *sur un sous-demi-groupe inverse normal* $T(S)$ *de* $\Psi(S)$.

Démonstration. Considérons l'idéalisateur $i(\Theta(S))$ de $\Theta(S)$ dans $\Psi(S)$, c'est-à-dire le sous-demi-groupe inverse

$$i(\Theta(S)) = \{\omega \in \Psi(S) | \omega\theta^a, \theta^a\omega \in \Theta(S) \text{ pour tout } a \in S\}.$$

Comme la restriction de δ à $\Pi(S)$ est un isomorphisme de $\Pi(S)$ sur $\Theta(S)$, il s'ensuit que $T(S)$ est une extension idéale essentielle maximale de $\Theta(S)$, d'où $T(S) \subseteq i(\Theta(S))$. En vertu de [**6**] Théorème 5.3, $i(\Theta(S))$ doit être une extension essentielle de $\Theta(S)$, ce qui montre que $i(\Theta(S)) = T(S)$.

Supposons que $\psi \in \Psi(S)$, où

$$\psi : \lambda_1 S\rho_1 \to \lambda_2 S\rho_2, \quad (\lambda_1, \rho_1), (\lambda_2, \rho_2) \in E_{\Omega(S)}.$$

Pour $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$, $\theta^a \in \Theta(S)$ on voit que

$$\begin{aligned}\psi^{-1}\tau_{(\lambda,\rho)}\psi\theta^a &= \psi^{-1}\tau_{(\lambda,\rho)}\psi\psi^{-1}\psi\theta^{aa^{-1}}\theta^a = \psi^{-1}\tau_{(\lambda,\rho)}\psi\theta^{aa^{-1}}\psi^{-1}\psi\theta^a \\ &= \psi^{-1}\tau_{(\lambda,\rho)}\theta^{(\lambda_2(aa^{-1})\rho_2)\psi^{-1}}\psi\theta^a \quad \text{(par [}\mathbf{6}\text{], Lemme 4.4)} \\ &\in \psi^{-1}\Theta(S)\psi\theta^a \subseteq \Theta(S),\end{aligned}$$

parce que $\Psi(S)$ est une extension conjuguée de $\Theta(S)$ ([**6**], Corollaire 4.5). De façon duale, on obtient

$$\theta^a\psi^{-1}\tau_{(\lambda,\rho)}\psi \in \Theta(S),$$

et par suite

$$\psi^{-1}\tau_{(\lambda,\rho)}\psi \in i(\Theta(S)) = T(S).$$

Par conséquent, $T(S)$ est auto-conjugué dans $\Psi(S)$, et celà montre que $T(S)$ est un sous-demi-groupe inverse normal de $\Psi(S)$.

Nous conservons les notations introduites jusqu'à présent, et nous considérons l'application

$$\kappa : \Psi(S) \to \Phi(\Omega(S)), \psi \to \psi\kappa,$$

où

$$\begin{aligned}\psi\kappa : &(\psi\psi^{-1}T(S)\psi\psi^{-1})\delta^{-1} \to (\psi^{-1}\psi T(S)\psi^{-1}\psi)\delta^{-1}, \\ &(\lambda, \rho) \to [\psi^{-1}[(\lambda, \rho)\delta]\psi]\delta^{-1}.\end{aligned}$$

THEOREME 3.2. *Soit* S *un demi-groupe à métacentre idempotent. Alors l'application* κ *est un isomorphisme de* $\Psi(S)$ *sur le plus grand sous-demi-groupe inverse de* $\Phi(\Omega(S))$ *qui contient* $\Theta(\Pi(S))$ *comme sous-demi-groupe inverse auto-conjugué.*

Démonstration. Il suit du Lemme 3.1, et de la Proposition 1 de [**5**] que κ est un homomorphisme de $\Psi(S)$ dans $\Phi(\Omega(S))$, et il va de soi que la restriction $\kappa|\Theta(S)$ est un isomorphisme de $\Theta(S)$ sur $\Theta(\Pi(S))$. Or, la congruence induite sur $\Theta(S)$ par κ est l'égalité, et comme $\Psi(S)$ est une extension essentielle de $\Theta(S)$, on peut conclure que κ est un isomorphisme de $\Psi(S)$ dans $\Phi(\Omega(S))$. En outre, comme nous savons que $\Psi(S)$ est une extension conjuguée essentielle maximale de $\Theta(S)$, il en résulte que $\Psi(S)\kappa$ est une extension conjuguée essentielle maximale de $\Theta(\Pi(S))$. Supposons que Φ est le plus grand sous-demi-groupe inverse de $\Phi(\Omega(S))$ qui contient $\Theta(\Pi(S))$ comme sous-demi-groupe inverse auto-conjugué. D'abord, on a $\Psi(S)\kappa \subseteq \Phi$. Supposons que ρ est une congruence sur Φ dont la restriction à $\Theta(\Pi(S))$ est l'égalité. Comme Θ est un isomorphisme de $\Omega(S)$ sur $\Theta(\Omega(S))$ ([**6**] Corollaire 6.8), où $\Theta(\Omega(S)) \subseteq \Phi$, et comme $\Omega(S)$ est une extension essentielle de $\Pi(S)$ ([**4**] Chapitre III), on conclut que la restriction de ρ à $\Theta(\Omega(S))$ est l'égalité. Tout sous-demi-groupe inverse de $\Psi(\Omega(S))$ qui contient $\Theta(\Omega(S))$, est une extension conjuguée essentielle de $\Theta(\Omega(S))$ ([**6**], Théorème 5.3 en conjonction avec Corollaire 6.8), d'où l'on obtient que Φ est une extension essentielle de $\Theta(\Omega(S))$. Mais le fait que la restriction de ρ à $\Theta(\Omega(S))$ est l'égalité implique maintenant que ρ est l'égalité sur Φ. Or Φ est une extension conjuguée essentielle maximale de $\Theta(\Pi(S))$. Ci-dessus nous avons vu que $\Psi(S)\kappa$ est une extension conjuguée essentielle maximale de $\Theta(\Pi(S))$. Il en résulte que $\Psi(S)\kappa = \Phi$ est le plus grand sous-demi-groupe inverse de $\Phi(\Omega(S))$ qui contient $\Theta(\Pi(S))$ comme sous-demi-groupe auto-conjugué.

Considérons de nouveau le cas d'un demi-treillis E. Désignons par $\mathscr{R}_E$ le demi-treillis des idéaux rétractés de E, et par $\mathscr{P}_E$ le demi-treillis des idéaux principaux de E. Il existe un isomorphisme de $\Omega(E)$ sur $\mathscr{R}_E$ qui, restreint à $\Pi(E)$, applique $\Pi(E)$ sur $\mathscr{P}_E$ [**3**]. Ce résultat implique en vertu du Théorème 3.2 que l'enveloppe conjuguée $\Psi(E)$ de E est isomorphe au plus grand sous-demi-groupe inverse de $\Phi(\mathscr{R}_E)$ qui contient $\Theta(\mathscr{P}_E)$ comme sous-demi-groupe auto-conjugué. Remarquons que $\Phi(\mathscr{R}_E)$ coïncide avec le demi-groupe fondamental de Munn $T_{\mathscr{R}_E}$ et que $\Phi(\mathscr{P}_E)$ coïncide avec le demi-groupe fondamental de Munn $T_{\mathscr{P}_E}$ $(\cong T_E)$. De plus, $\Theta(\mathscr{P}_E)$ est le demi-treillis des idempotents de $T_{\mathscr{P}_E}$.

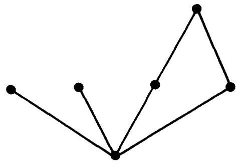
COROLLAIRE 3.3. *Soit E un demi-treillis. Alors l'enveloppe conjuguée $\Psi(E)$ de E est isomorphe à l'idéalisateur $i(T_{\mathscr{P}_E})$ du demi-groupe de Munn $T_{\mathscr{P}_E}$ dans le demi-groupe de Munn $T_{\mathscr{R}_E}$.*

Démonstration. Comme $\mathscr{P}_E$ est un idéal de $\mathscr{R}_E$, il va de soi que l'idéalisateur $i(T_{\mathscr{P}_E})$ contient le demi-treillis des idempotents de $T_{\mathscr{P}_E}$ comme sous-demi-groupe inverse auto-conjugué. Si nous désignons par T le plus grand sous-demi-groupe inverse de $T_{\mathscr{R}_E}$ qui contient le demi-treillis des idempotents de $T_{\mathscr{P}_E}$ comme sous-demi-groupe inverse auto-conjugué, nous avons $i(T_{\mathscr{P}_E}) \subseteq T$. Supposons que $\xi \in T_{\mathscr{R}_E}$ et $\xi \notin i(T_{\mathscr{P}_E})$. Il existe un $\zeta \in T_{\mathscr{P}_E}$ où $\zeta\xi \notin T_{\mathscr{P}_E}$; en d'autres mots, $(\zeta\xi)^{-1}(\zeta\xi)$ est un idempotent de $T_{\mathscr{R}_E}$ qui n'appartient pas à $T_{\mathscr{P}_E}$, tandis que l'idempotent $(\zeta\xi)(\zeta\xi)^{-1}$ appartient à $T_{\mathscr{P}_E}$. Celà implique que $\zeta\xi \notin T$, parce que

$$(\zeta\xi)^{-1}((\zeta\xi)(\zeta\xi)^{-1})(\zeta\xi) = (\zeta\xi)^{-1}(\zeta\xi),$$

et comme T est un sous-demi-groupe inverse de $T_{\mathscr{R}_E}$ qui contient ζ, on a $\xi \notin T$. Il en résulte que $T = i(T_{\mathscr{P}_E})$. La démonstration suit maintenant de la remarque qui précède le corollaire.

Exemple 3.4. Soit E le demi-treillis représenté par le diagramme suivant.



On peut vérifier que $i(T_{\mathscr{P}_E})$ est un sous-demi-groupe propre de $T_{\mathscr{R}_E}$. Ceci démontre que l'homomorphisme κ du Théorème 3.2 n'est pas nécessairement surjectif. Aussi, comme dans notre exemple nous avons $\Psi(E) \cong \Omega(\Phi(E))$, nous avons démontré que pour un demi-groupe inverse S à métacentre idempotent il n'est pas nécessairement vrai que $\Omega(\Phi(S))$ est isomorphe à $\Phi(\Omega(S))$. Notre exemple démontre aussi qu'une extension normale d'une extension idéale n'est pas nécessairement une extension conjuguée.

Les deux procédés qui ont été établis peuvent être illustrés par le suivant.

$$\begin{tikzcd}
\Phi(\Omega(S)) \arrow[d, dash] & & \Omega(\Phi(S)) \arrow[d, dash] \\
\square \arrow[dd, dash] & \Psi(S) \arrow[l, "\kappa"'] \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, dash] & \square \arrow[dd, dash] \\
& \Phi(S) \arrow[d, dash] & \\
\Theta(\Pi(S)) & S \cong \Theta(S) \arrow[l] \arrow[r] & \Pi(\Theta(S))
\end{tikzcd}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. W. D. Munn, *Fundamental inverse semigroups*, Quart. J. Math. Oxford (2) *21* (1970), 157–170.
2. F. Pastijn, *Essential normal and conjugate extensions of inverse semigroups* (à paraître).
3. M. Petrich, *On ideals of a semilattice*, Czechoslovak Math. J. *22* (1972), 361–367.
4. ——— *Introduction to semigroups* (Merrill, Columbus, 1973).
5. ———*Extensions normales de demi-groupes inverses*, Fund. Math. *112* (1981), 187–203.
6. ——— *The conjugate hull of an inverse semigroup*, Glasgow Math. J. *21* (1980), 103–124. Math., *33* (1981), 1157–1164.

Dienst Hogere Meetkunde,
Rijksuniversiteit te Gent,
Gent, Belgique