LA THÉORIE DU COMPORTEMENT ET LA CREDIBILITY THEORY AMÉRICAINE

E. FRANCKX

Bruxelles

AVANT PROPOS

La théorie américaine de la crédibilité est considérée par nos collègues américains comme une pièce-maîtresse de la théorie actuarielle „non life'' (Longley Cook: An Introduction to Credibility Theory). Elle a reçu la consécration de l'expérience sur le marché le plus large du monde. Dirigeants d'entreprises et autorités de contrôle se sont accordés sur son emploi. Ce sont là des résultats positifs qui ne peuvent que faire réfléchir tous les actuaires. ASTIN a mis le problème à l'ordre du jour du colloque de Lucerne en 1965. Cette année, la réunion d'Arnhem reprend le même sujet, à juste titre.

Mais il faut le constater, si les méthodes d'adaptation américaines donnent des résultats pratiques indiscutables, elles ont été établies par des méthodes pragmatiques, d'abord basées sur certains cas particuliers et admises, ex cathedra, en toute généralité. Cette situation laisse un sentiment de malaise et soulève de nombreuses critiques. (Derron: Kredibilität und Versicherungwesen) (Mayerson: A Bayesan view of Credibility). La théorie de la crédibilité impose avant tout la recherche d'une base théorique plus valable.

La question est délicate. Elle touche directement au problème de l'inférence statistique qui constitue entre probabilistes et statisticiens un domaine très controversé. La présente note apporte une contribution très subjective à la théorie américaine. Elle tend à élargir le débat et conduit à la conclusion que l'établissement d'une théorie du comportement de l'assureur serait souhaitable. Dans une telle théorie, les mathématiques ont leur importance, mais elles présupposent l'admission à priori de certaines règles d'inférence.

Mais il n'en reste pas moins vrai que la théorie américaine a conduit à *l'adoption de règles de décision, communes entre assureurs.*

https://doi.org/10.1017/S0515036100002166 Published online by Cambridge University Press

Elle a eu pour conséquence une certaine unité de doctrine pratique. Ce fait est remarquable.

Événements quasi-impossibles ou quasi-certains

A. Notre connaissance du monde extérieur résulte de l'observation, de l'enrégistrement et de l'interprétation des faits. Beaucoup d'événements qui nous concernent sont aléatoires. Mais s'il existe des circonstances qui nous permettent de croire qu'un événement possède très peu de chances de se réaliser, alors nous admettons, dans la vie courante, qu'il est *quasi-impossible.* Il en est de même des événements quasi-certains. C'est Cournot qui a explicité cette règle fondamentale de notre comportement: *si la probabilité d'un événement n'atteint pas un seuil minimal, alors l'événement est quasi impossible.*

Ce seuil minimum est largement subjectif; certains d'entre nous osent plus que d'autres. Mais ce seuil peut être fixé par une convention supplémentaire, entre utilisateurs (par exemple en statistique ou en science actuarielle, en artillerie ou pour telle ou telle catégorie de problèmes, on admet, par exemple, 1 % ou 5 %). C'est là une règle de décision collective, à laquelle, à tort ou à raison tout le monde se soumet.

La théorie du comportement présuppose l'introduction des deux conventions précédentes. On peut discuter leur valeur logique: car admettre qu'un événement est quasi impossible ne veut pas dire qu'il ne peut pas se produire. Au contraire, au cours d'une longue série d'épreuves il est presque certain d'arriver. Mais ces survenances sont tellement sporadiques, à l'échelle humaine, qu'on „convient" de ne pas les prendre en considération. Quant un tel événement quasi impossible survient, on parle de „fatalité".

Nous admettrons, dans la suite, que la convention de définition des événements quasi impossibles a été précisée. Dans l'établissement de la théorie, il suffit d'admettre l'existence d'un seuil minimal.

B. De ce qui précède, il résulte que *si au cours de l'évolution de certains phénomènes, leur probabilité tombe en dessous du seuil fixé par la définition des événements quasi impossibles, en vertu de la convention établie, ils seront systématiquement négligés dans notre comportement habituel.*

En particulier, tous les phénomènes qui tombent sous la dépendance de la loi des grands nombres et de la tendance centrale, conduisent à des événements quasi impossibles. C'est d'ailleurs à ce titre que les lois limites du calcul des probabilités possèdent leurs véritables titres pratiques.

Nous rappelons le théorème de Lindeberg-Lévy de la tendance centrale: *Si l'on effectue une suite de n expériences relatives à la même variable aléatoire X, alors la variable aléatoire „cumul" définie par*:

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

subit l'attraction de la loi de Gauss et pour n, suffisament grand, pratiquement:

$$\text{prob} \left\{ \alpha \leqslant \frac{S_n - nE_x}{\sqrt{n}\,\sigma_x} \leqslant \beta \right\} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (1)$$

ou E_x et σ_x désignent la valeur moyenne et l'écart quadratique de la variable X.

C. En termes d'événements quasi certains symétriques, on obtient de (1)

Au *seuil* de $\frac{K}{100}$, *il est quasi certain que le cumul* S_n *appartiendra au domaine*:

$$nE_x - \rho_k \sigma_x \sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant nE_x + \rho_k \sigma_x \sqrt{n}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} k & = 1 \quad 2 \quad 5 \quad 10 \\ \rho_k & = 2{,}58 \quad 2{,}33 \quad 4{,}96 \quad 4{,}65 \end{cases} \qquad (2)$$

Par exemple, si X est une variable de Poisson donnant le nombre sinistres frappant un contrat avec: $p_{x=k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ on obtient: $E_x = \sigma_x^2 = \lambda$

Au seuil de 5 %, il est quasi certain que le total n des sinistres de n contrats échangeables appartient au domaine:

$$n\lambda - 1{,}96\,\lambda \sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant n\lambda + 1{,}96\,\lambda \sqrt{n}$$

De tels résultats sont classiques. Notons que n doit être assez grand pour que la tendance centrale soit effectivement acquise.

Le comportement a priori

A. En calcul des probabilités, la théorie mathématique a pour but de justifier, a priori, des propriétés très générales, de régularité statistique, que l'expérience confirme. Ces propriétés et régularités, valables en moyenne, n'excluent absolument pas la possibilité d'arrivée de fluctuations.

Or dans de nombreuses applications, les fluctuations conduisent au déséquilibre et peuvent êtres très défavorables. Cette notion, en assurance, est à la base de la théorie du risque au sens le plus général.

Un des buts de la credibility theory est précisément de limiter les effets possibles des fluctuations défavorables.

a) Revenons au problème du cumul. La fluctuation, après n épreuves, est la différence $(S_n - nE_x)$. Elle peut être mesurée de différentes manières; en particulier, on peut prendre la valeur moyenne nE_x comme unité de mesure.

Nous posons à priori

$$S_n = nE_x \left(1 + \frac{\lambda}{100}\right) \tag{3}$$

λ définit le pourcentage d'écart par rapport à la valeur moyenne, c'est un nombre aléatoire.

b) Cela étant admis, nous considérons un individu quelconque intéressé au cumul de S_n. *Nous dirons à priori qu'il a fixé son comportement, s'il agit* (théorie de la décision) *de telle sorte que*:

$$\text{prob}\,\{\lambda \geqslant L\} \leqslant \frac{K}{100} \tag{4}$$

En d'autres termes, le comportement d'un individu (en particulier d'un assureur) *est fixé*, s'il s'arrange *a priori pour qu'une fluctuation de L % sur la valeur probable de S_n soit quasi impossible au seuil de K %.*

Nous dirons que K et L sont les *paramètres de comportement.*

B. Dans le problème qui nous occupe, il y a un troisième élément en fait le paramètre principel: la valeur n. *Dès lors, se pose la question de savoir quelles contraintes sont à imposer à n pour que*

https://doi.org/10.1017/S0515036100002166 Published online by Cambridge University Press

l'inégalité du comportement (4) *soit vérifiée.* Compte tenu de la tendance centrale (1), en éliminant $(S_n - nE)$ nous trouvons que pour n suffisamment grand,

$$\text{prob}\left\{|\lambda| \geqslant 100\ \rho_k \frac{\sigma_x}{E_x \sqrt{n}}\right\} \leqslant \frac{K}{100}$$

Si donc on calcule le nombre n_0 par l'égalité

$$100\ \rho_k \frac{\sigma_x}{E_x \sqrt{n_0}} = L \tag{5}$$

on aura pour tout $n \geqslant n_0$ a fortiori

$$\text{prob}\{|\lambda| > L\} \leqslant \frac{K}{100}$$

et l'inégalité (4) sera vérifée.

La contrainte à imposer à n peut s'énoncer comme suit:

Pour que l'inégalité de comportement soit vérifiée, il suffit que le nombre d'épreuves n jouées dépasse le nombre n_0 défini par (5). La relation (5) est le *point de départ* de la théorie du comportement. Une première conclusion pratique en résulte, il *faut* que le nombre d'épreuves soit relativement grand pour vérifier (4). D'ailleurs parier sur les résultats de quelques épreuves est toujours spéculatif, l'expérience courante le confirme.

C. Nous pouvons donner au résultat précédent *une forme invariante c'est-à-dire indépendante de la nature particulière de la variable aléatoire X dont le cumul est considéré.*

En effet en écrivant

$$I = \left(\frac{E_x}{\sigma_x}\right)^2 n_0 = \left(\frac{100\,\rho_K}{L}\right)^2 \tag{5, bis}$$

le deuxième membre ne dépend que des paramètres de comportement K et L, il sera appelé „nombre critique" I.

Calculée, la valeur de I est donnée sous la forme du tableau ci-après:

valeur de K

		1	5	10	
	2,5	10.623	6.147	4.326	
valeurs	5	2.656	1.537	1.082	*Tableau des nombres*
de L.	7,5	1.180	683	482	*critiques I*
	10	664	384	271	

Ce sont précisément les nombres qui interviennent dans un tableau fondamental de la credibility theory (Longley-Cook page 9). La correspondance est encore plus frappante si nous prenons pour la variable X le modèle mathématique de Poisson, qui est à la base de la théorie américaine.

Car si $$p_{x=k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

on obtient en particulier $$I = \lambda n_0 \tag{6}$$

Donc pour qu'une classe de risques, obéissant à une loi de Poisson de paramètre λ, *satisfasse à l'inégalité de comportement, il suffit que le nombre probable de sinistres dépasse le nombre critique* I *correspondant aux paramètres de comportement* (K L).

D. Les considérations précédentes conduisent une conclusion générale: pour qu'à priori, le total à payer pour une classe de risques ne s'écarte pas dans de fortes proportions du montant attendu (moyen), *il suffit que cette classe de risque possède un effectif minimal.*

D'une manière plus précise, l'algorithme à appliquer sera le suivant:

a) les constantes du comportement ayant été fixées, la valeur de I en résulte par la formule (5 bis).
b) le risque étant statistiquement connu, on peut, par échantillonnage, calculer la valeur de E/σ.

Dès lors, la relation (5 bis) permet le calcul de n_0 et on se trouvera devant l'*alternative*:

— ou bien l'effectif n'est au moins égal à n_0 et la classe de risque est admissible

— ou bien l'effectif n'est inférieur à n_0 et alors le risque de fluctuation dépasse les normes fixées par le comportement. L'assureur sera amené à prendre des décisions complémentaires soit en augmentant l'effectif en participant à un Pool, soit en augmentant le rapport E/σ par la réassurance.

Ces quelques considérations indiquent qu'une théorie plus développée du comportement de l'assureur pourrait être l'objet utile de recherches nouvelles.

Elle possède assurément un caractère opérationnel.

Le comportement a posteriori

A. La credibility theory américaine touche au *comportement a posteriori*. Ayant obtenu un échantillon d'une classe de risques *le problème posé est celui de la déduction d'une tarification valable* à partir de cet échantillon. C'est un problème d'inférence et a priori les actuaires américains marquent leur désaccord avec les méthodes préconisées par l'école statistique anglosaxonne de Neyman-Pearson. La question est d'autant plus délicate qu'une méthode générale d'inférence n'a jamais été admise par l'ensemble des statisticiens.

Et pourtant le problème est important, car la loi des grands nombres sanctionne toujours une mauvaise tarification. Aussi les actuaires de la Casualty ont-ils dégagé *certaines règles de comportement qui ont pour but d'éviter que la prime pure demandée ne diffère trop de la prime vraie.* Telle est en effet l'idée directrice émise par le professeur Mowbray en 1914 (How extensive a Payroll exposure is necessary to give a Dependable Pure Premium CAS I (1914).

Si on se base sur un ensemble statistique déterminé, on ne connait pas a priori la valeur numérique du rapport de la fluctuation à la valeur moyenne. En effet, la variable X qui caractérise le risque aléatoire du total à payer par contrat n'est pas connue. D'autre part le vrai risque commercial pour l'assureur résulte d'une fluctuation favorable à son égard dans le passé qui le conduirait à admettre une tarification trop basse, donc défavorable pour ses affaires futures.

B. Puisque l'étude a priori montre que le danger d'une fluctuation relative diminue lorsque la taille de l'échantillon augmente, les actuaires américains ont admis la règle d'inférence suivante: *il faut que l'échantillon atteigne une taille suffisante pour pouvoir en déduire une tarification valable* (*le volume des données doit atteindre le niveau correspondant à la „full credibility"* dans le language conventionnel de la Casualty Society).

Passons au cas particulier du modèle de Poisson et du sinistre moyen. Le problème consiste à définir la taille suffisante de l'échantillon sur lequel peut s'opérer une tarification valable.

Nous avons vu (5) qu'a *priori* il *suffit* que le *nombre probable des sinistres* atteigne ou dépasse le nombre critique (relatif aux paramètres de comportement) pour que l'on ait l'obtention de l'événement quasi impossible.

La règle américaine admise est: à *posteriori*, il *faut* que le *nombre des sinistres constatés* dans l'échantillon atteigne le nombre critique pour que la tarification, qui est déduite, soit valable dans l'avenir.

On passe de la proposition a priori à la règle a posteriori moyennant la modification des termes soulignés.

La règle précédente constitue le fondement de la méthode américaine—certains lui confèrent un pouvoir magique—.

C. Nous pouvons nous demander—tout en admettant une règle d'inférence semblable—si on ne peut se débarasser des hypothèses particulières du modèle mathématique admis en Amérique, c'est-à-dire loi de Poisson et sinistre moyen. Le problème revient à repasser de la condition (6) à la condition (5 bis).

Or, l'orsqu'on dispose de la population des épreuves, on peut toujours faire l'estimation statistique du rapport:

$$\alpha = \left(\frac{E_x}{\sigma_x}\right)^2$$

qui pour les risques non life doit être en général petit, si pas très petit, mais reste spécifique pour chaque classe commerciale de risques (et chaque organisme d'assurances).

Dès lors, nous savons par l'étude précédente, que pour que l'inégalité du comportement soit vérifiée; il *suffit* que la taille de l'échantillon atteigne le nombre I/α.

A partir cela et en appliquant la même règle d'inférence, on en déduit la règle opérationnelle suivante: *pour qu'a posteriori l'égalité* *du comportement soit atteinte, il faut que la taille de l'échantillon proposé atteigne le nombre I/α.*

Telle nous semble la généralisation normale de la procédure américaine.

D. Cela nous conduit, sur la base de l'expérience, à introduire une notion nouvelle: celle d'*échantillons équivalents*.

A priori pour deux classes de risques différentes, mais qui admettent la même valeur numérique de α, *il suffit de prendre la même taille d'échantillon pour que, pour n grand, cette même taille soit suffisante pour atteindre l'égalité de comportement.*

De telles classes de risques entrainent les mêmes dangers pour les fluctuations relatives. Elles deviennent également adéquates pour effectuer une tarification. Cela ne veut pas dire que deux échantillons ,,équivalents et adéquats'' ne vont pas conduire à des tarifications différentes, mais uniquement qu'il est quasi certain que *les deux valeurs de E_x qu'elles définissent sont également plausibles.*

La règle d'inférence revient à admettre que ce caractère d'adéquation est maintenu a postériori ou que la notion d'échantillon ,,équivalents et adéquats'' est indépendante du temps.

Si l'on veut bien y réfléchir, tout ce qui vient d'être précédemment dit s'applique au cas des variables ,,indicateurs'' x_i utilisées dans le problème fondamental de la fréquence d'un événement à probabilité inconnue (Problème de Bernouilli). Le total stochastique S_n correspond au nombre de répétitions de l'événement au cours des n épreuves. Pour ces variables x_i on a:

$$E_x = p \qquad \sigma_x^2 = p(1 - p)$$

en sorte que le coefficient (6) vaut $\dfrac{p}{1 - p}$.

(5 bis) entraine alors la proposition: *a priori il devient quasi impossible que l'écart relatif entre la fréquence et la probabilité dépasse $L\,\%$, si le nombre des épreuves atteint $n_0 = I\,\dfrac{1 - p}{p}$.*

La règle d'inférence, lorsque p est inconnu, nous impose la taille minimale n_0 ou nous avons remplacé p par son estimation: la fréquence. En pratique, c'est ce que nous faisons toujours, même si les théories mathématiques et logiques dont, nous disposons ac-

https://doi.org/10.1017/S0515036100002166 Published online by Cambridge University Press

tuellement ne sont pas assez puissantes pour justifier cette règle de comportement.

Le problème, introduit par le principe de full credibility, pose la question de l'utilisation de la tendance centrale a posteriori. Pour les défenseurs de la méthode de Bayes, la question est tranchée par une hypothèse complémentaire (celle de Laplace ou une autre analogue). Pour les défenseurs de la théorie de la fréquence, cette utilisation reste justifiée a priori par le théorème de Bernoulli.