Canad. Math. Bull. Vol. **34** (2), 1991 pp. 215–219

# APPROXIMATION HOLOMORPHE GLOBALE SUR L'UNION DE DEUX SOUS-ESPACES TOTALEMENT RÉELS MAXIMAUX DE $\mathbf{C}^n$

EL MOSTAPHA FRIH

ABSTRACT. Let $E$ and $F$ be real subspaces of $\mathbf{C}^n$ which contain no non trivial complex subspace of $\mathbf{C}^n$ and intersecting only at the origin. We prove in a special case that every continuous function on $E \cup F$ can be asymptotically approximated on $E \cup F$ by an entire function.

1. **Introduction et résultat.** Un sous-espace vectoriel réel $E$ de $\mathbf{C}^n$ est dit *totalement réel* s'il ne contient pas de droite complexe, ce qui équivaut à dire que $E \cap iE = \{0\}$. Il est facile de voir que la dimension de $E$ ne peut excéder $n$ et que l'image de $E$ par une transformation linéaire complexe non-singulière est un sous-espace totalement réel de $\mathbf{C}^n$. Il a été aussi prouvé dans [4] que toute fonction continue sur $E$ peut être approchée sur $E$ par la réstriction d'une fonction entière.

Soient $E$ et $F$ deux sous-espaces réels de $\mathbf{C}^n$ de dimension $n$. Nous supposons dans toute la suite que $E$ et $F$ sont des sous-espaces totalement réels de $\mathbf{C}^n$ et $E \cap F = \{0\}$. Dans [6], Weinstock obtient une condition nécessaire et suffisante pour que tout compact de $E \cup F$ soit polynômialement convexe et que toute fonction continue sur $K$ soit limite uniforme sur $K$ de polynômes.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'approximation holomorphe globale sur le sous-ensemble non borné $E \cup F$ dans un cas particulier. Nous donnons une démonstration simple dans ce cas de l'approximation polynômiale sur tout compact de $E \cup F$ et nous établirons un théorème d'approximation holomorphe globale sur $E \cup F$.

Plus précisément, soit $E$ un sous-espace réel de dimension $n$ de $\mathbf{C}^n$ qui est totalement réel. Soit $(e_i)_{1 \leqq i \leqq n}$, une base de $E$. Du fait que $E \cap iE = \{0\}$, il s'en suit que les vecteurs $e_i, i = 1, \ldots, n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{C}$. Donc, il existe une transformation linéaire complexe non-singulière qui transforme $E$ en $\mathbf{R}^n = \{z \in \mathbf{C}^n;\ \operatorname{Im} z_j = 0, j = 1, \ldots, n\}$. Comme la convexité polynômiale et l'approximation holomorphe sont invariantes par les transformations linéaires complexes non-singulières, nous pouvons supposer que $E = \mathbf{R}^n$.

Soit $F$ un deuxième sous-espace réel de dimension $n$ de $\mathbf{C}^n$ tel que $F \cap \mathbf{R}^n = \{0\}$. Soit $(a_j + ib_j)_{1 \leqq j \leqq n}$, une base de $F$, Comme $F \cap \mathbf{R}^n = \{0\}$, les vecteurs $(b_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^n$. Donc il existe une matrice unique réelle $A$ telle que

Received by the editors December 4, 1990.
AMS subject classification: 32E30.

$Ab_j = a_j$ pour $1 \leqq j \leqq n$. Donc $F$ peut être représenté d'une façon unique comme $F = (A + i)\mathbf{R}^n$.

Par des arguments élémentaires d'algèbre linéaire il a été montré dans [6], que $(A+i)\mathbf{R}^n$ est un sous-espace totalement réel de $\mathbf{C}^n$ si et seulement si $i$ n'est pas valeur propre de $A$.

Comme la convexité polynômiale et l'approximation holomorphe sont invariantes par les transformations linéaires complexes non-singulières, nous pouvons supposer que les deux sous-espaces totalement réels de $\mathbf{C}^n$ se réduisent à $\mathbf{R}^n$ et $(A + i)\mathbf{R}^n$ où $A$ est une matrice réelle n'ayant pas $i$ pour valeur propre.

Le principal résultat de ce chapitre est le suivant.

THÉORÈME. *Soit $A$ une matrice réelle d'ordre $n$ diagonalisable sur* $\mathbf{R}$ *et soit $M = \mathbf{R}^n \cup (A + i)\mathbf{R}^n$. Alors pour toute fonction continue sur $M$ et toute fonction $\epsilon$ continue et positive sur $M$, il existe une fonction $g$ holomorphe dans* $\mathbf{C}^n$ *telle que $|f(z) - g(z)| < \epsilon(z)$ pour tout $z \in M$.*

2. **Préliminaires.** Si $K$ est un compact de $\mathbf{C}^n$, $C(K)$ désignera l'algèbre des fonctions continues sur $K$ à valeurs complexes munie de la norme usuelle qui sera notée $\| \ \|_K$ et $A(K, \mathbf{C}^n)$ sera la fermeture dans $C(K)$ des polynômes. L'enveloppe convexe polynômiale $K^\wedge$ de $K$ est

$$\{z \in \mathbf{C}^n;\ |h(z)| \leqq \|h\|_K, \text{ pour tout polynôme } h\}$$

et $K$ est dit polynômialement convexe si $K^\wedge = K$.

Dans la suite, nous nous servirons du résultat suivant.

THÉORÈME(2.1). (Mergelyan, [2]). *Soit $K$ un compact de* $\mathbf{C}$. *Alors toute fonction continue sur $K$ et holomorphe dans l'intérieur de $K$ est limite uniforme sur $K$ de polynômes si et seulement si $\mathbf{C} \setminus K$ est connexe.*

Pour la preuve du théorème, nous aurons besoin du lemme suivant qui est un cas particulier des résultats de [6], mais dans le cas où nous nous plaçons nous pouvons donner une preuve très simple

LEMME(2.2). *Supposons les hypothèses du théorème satisfaites, alors pour tout compact $K$ de $M$, nous avons $C(K) = A(K, \mathbf{C}^n)$ et par suite $K$ est polynômialement convexe.*

PREUVE. Si $S$ est une matrice réelle d'ordre $n$ non singulière, alors $S$ transforme $\mathbf{R}^n \cup (A + i)\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n \cup (SAS^{-1} + i)\mathbf{R}^n$. Nous pouvons donc supposer que $A$ est une matrice diagonale réelle et si on note $\alpha_j$ les éléments diagonaux de $A$ nous pouvons supposer que $M = \mathbf{R}^n \cup (\prod_{j=1}^n (\alpha_j + i)\mathbf{R})$. Soit $K$ un compact de $M$. alors $K \subset (\bar{D}_R)^n$ où $D_R = \{z \in \mathbf{C};\ |z| < R\}$. Posons $I_R = [-R, R]$ et $M_j^R = \bar{D}_R \cap ((\alpha_j + i)\mathbf{R})$. Alors nous avons $K \subset (I_R)^n \cup (\prod_{j=1}^n M_j^R)$. Soit $f \in C(K)$. Prolongeons $f$ continument partout et comme $K \subset \prod_{j=1}^n (I_R \cup M_j^R)$, $f$ est limite uniforme sur $\prod_{j=1}^n (I_R \cup M_j^R)$ de combinaisons linéaires finies de fonctions de la forme $\prod_{j=1}^n f_j$ où chaque $f_j$ est continue sur $I_R \cup M_j^R$. Comme chaque $I_R \cup M_j^R$ est d'intérieur vide dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C} \setminus (I_R \cup M_j^R)$ est connexe, les fonctions $f_j$ sont limites uniformes sur $I_R \cup M_j^R$ de polynômes par le théorème (2.1). Donc $f$ est aussi limite uniforme sur $\prod_{j=1}^n (I_R \cup M_j^R)$ et par conséquent sur $K$ polynômes. Comme le spectre de l'algèbre uniforme $C(K)$ est $K$ (voir [1]), et celui de $A(K, \mathbf{C}^n)$ est $K^\wedge$ (voir [3]), il s'en suit que $K$ est polynômialement convexe. ∎

Le lemme suivant est une modification d'un résultat dans [5], mais la preuve est la même.

LEMME(2.3). *Soient $K_j, j = 1, \ldots, n$ des compacts de $\mathbf{C}$ et $r_1, \ldots, r_n$ des réels positifs. On suppose que les compacts $K_j$ sont d'intérieurs vides et que les ensembles $\mathbf{C} \setminus K_j$ et $\mathbf{C} \setminus (\bar{D}_{r_j} \cup K_j)$ pour $j = 1, \ldots, n$ sont connexes. Alors toute fonction continue sur $K := (\prod_{j=1}^n \bar{D}_{r_j}) \cup (\prod_{j=1}^n K_j)$ et holomorphe dans $\prod_{j=1}^n D_{r_j}$ est limite uniforme sur $K$ de polynômes.*

PREUVE. Soit $\mu$ une mesure sur $K$ orthogonale aux polynômes. Par le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que $\mu$ est orthogonale à l'espace des fonctions continues sur $K$ et holomorphes dans $\prod_{j=1}^n D_{r_j}$. Pour cela il suffit de montrer que le support de $\mu$ est contenu dans $\prod_{j=1}^n \bar{D}_{r_j}$, car toute fonction continue sur $\prod_{j=1}^n \bar{D}_{r_j}$ et holomorphe dans son intérieur est limite uniforme sur $\prod_{j=1}^n \bar{D}_{r_j}$ de polynômes. Soit $\phi$ une fonction continue sur $K$, dont le support ne rencontre pas $\prod_{j=1}^n \bar{D}_{r_j}$, nous devons montrer que $\mu(\phi) = 0$.

Pour $j = 1, \ldots, n$, soit $\theta_j$ la fonction définie sur $\mathbf{C}^n$ par

$$\theta_j(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_n) = \inf_{w \in \bar{D}_{r_j}} |z_j - w|$$

soit $h$ la fonction qui est égale à $\phi \setminus \sum_{j=1}^n \theta_j$ sur le support de $\phi$ et qui est nulle ailleurs. La fonction $h$ est continue et a le même support que $\phi$. Comme $\phi = \sum_{j=1}^n \theta_j h$, il suffit de montrer que $\theta_k \mu = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$.

Considérée comme fonction de $z_k$, $\theta_k$ s'annulle dans $D_{r_k}$ et est continue dans $\bar{D}_{r_k} \cup K_k$, comme $\mathbf{C} \setminus (\bar{D}_{r_k} \cup K_k)$ est connexe, par le théorème (2.1), $\theta_k$ est limite uniforme de polynômes sur $\bar{D}_{r_k} \cup K_k$ et donc sur $K$ car $\theta_k$ ne dépend que de $z_k$. Cette propriété et le fait que $\mu$ est orthogonale aux polynômes implique que $\theta_k \mu$ est orthogonale aux polynômes. De plus le support $\theta_k \mu$ est contenu dans $\prod_{j=1}^n K_j$, car $\theta_k$ s'annulle dans $\prod_{j=1}^n \bar{D}_{r_j}$.

Soit $f$ une fonction continue sur $\prod_{j=1}^n K_j$, nous pouvons alors approcher $f$ uniformément sur $\prod_{j=1}^n K_j$ par des combinaisons linéaires finies de fonction de la forme $\prod_{j=1}^n f_j(x_j)$ où chaque $f_j$ est continue sur $K_j$ Comme $K_j$ est d'intérieur vide et $\mathbf{C}/K_j$ connexe, chaque $f_j$ est limite uniforme de polynômes sur $K_j$ d'après le théorème (2.1). Donc $f$ est limite uniforme sur $\prod_{j=1}^n K_j$ de polynômes et comme $\theta_k \mu$ est est orthogonale aux polynômes nous avons $\theta_k \mu(f) = 0$. ∎

3. **Preuve du théorème.** Nous allons démontrer le théorème en premier lieu dans le cas où $\epsilon(x) \equiv 1$. Nous pouvons supposer que la fonction à approcher $f$ est continue dans $\mathbf{C}^n$. Soit $(\epsilon_i)_{i \geq 0}$ une suite de nombres positifs vérifiant $\sum_{i \geq 0} \epsilon_i = 1$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1991-034-4 Published online by Cambridge University Press

Posons $D_R = \{z \in \mathbf{C};\ |z| < R\}, I_R = [-R, R]$ et $M_j^R = \bar{D}_R \cap ((\alpha_j + i)\mathbf{R})$ où les réels $\alpha_j$ sont les valeurs propres de $A$.

D'après le lemme (2.2), il existe un polynôme $g_0$ tel que

$$(3.1) \qquad |f(z) - g_0(z)| < \epsilon_0, \text{ pour } z \in (I_2)^n \cup \left(\prod_{j=1}^n M_j^2\right).$$

Soit $\alpha_1 \in C^\infty(\mathbf{C}^n), 0 \leqq \alpha_1 \leqq 1, \alpha_1 = 1$ sur $(\bar{D}_1)^n$ et $\alpha_1 = 0$ à l'extérieur de $(\bar{D}_2)^n$. Posons $f_1 = \alpha_1 g_0 + (1 - \alpha_1)f$. Comme $f$ est continue partout et holomorphe dans $(D_1)^n$ et comme les ensembles $\mathbf{C} \setminus (I_3 \cup M_j^3)$ et $\mathbf{C} \setminus (\bar{D}_1 \cup I_3 \cup M_j^3)$ sont connexes, nous pouvons utiliser le lemme (2.3), pour approcher $f_1$ uniformément sur $(\bar{D}_1)^n \cup (\prod_{j=1}^n (I_3 \cup M_j^3))$ par un polynôme $g_1$ et en particulier nous avons

$$(3.2) \qquad |f_1(z) - g_1(z)| < \epsilon_1, \text{ pour } z \in (\bar{D}_1)^n \cup (I_3)^n \cup \left(\prod_{j=1}^n M_j^3\right)$$

comme $\alpha_1 = 1$ sur $(\bar{D}_1)^n$ nous avons

$$(3.3) \qquad |g_0(z) - g_1(z)| < \epsilon_1, \text{ pour } z \in (\bar{D}_1)^n$$

comme $f_1 = f$ sur $M \setminus (I_2)^n \cup (\prod_{j=1}^n M_j^2)$ et par (3.2), nous avons

$$(3.4) \quad |f(z) - g_1(z)| < \epsilon_1, \text{ pour } z \in \left[(I_3)^n \cup \left(\prod_{j=1}^n M_j^3\right)\right] \setminus \left[(I_2)^n \cup \left(\prod_{j=1}^n M_j^2\right)\right].$$

Des inégalités (3.1) et (3.2) et du fait que $f_1 - f = \alpha_1(g_0 - f)$ on a

$$(3.5) \qquad |f(z) - g_1(z)| < \epsilon_0 + \epsilon_1, \text{ pour } z \in (I_2)^n \cup \left(\prod_{j=1}^n M_j^2\right).$$

Les inégalités (3.4) et (3.5) donnent

$$(3.6) \qquad |f(z) - g_1(z)| < \epsilon_0 + \epsilon_1, \text{ pour } z \in (I_3)^n \cup \left(\prod_{j=1}^n M_j^3\right).$$

Supposons qu'on a obtenu des polynômes $g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}$ vérifiant

$$(3.7) \qquad |g_i(z) - g_{i-1}(z)| < \epsilon_i, \text{ pour } z \in (\bar{D}_i)^n \text{ et } i = 1, \ldots, k-1$$

et

$$(3.8) \quad |f(z) - g_i(z)| < \sum_{v=0}^{i} \epsilon_v, \text{ pour } z \in (I_{i+2})^n \cup \left(\prod_{j=1}^n M_j^{i+2}\right), \ i = 0, \ldots, k-1.$$

Soit $\alpha_k \in C^\infty(\mathbf{C}^n), 0 \leqq \alpha_k \leqq 1, \alpha_k = 1$ sur $(\bar{D}_k)^n$ et $\alpha_k = 0$ à l'extérieur de $(\bar{D}_{k+1})^n$. Soit $f_k = \alpha_k g_{k-1} + (1 - \alpha_k)f$. En utilisant le lemme (2.3) de la même façon pour obtenir (3.2), il existe un polynôme $g_k$ tel que

$$|f_k(z) - g_k(z)| < \epsilon_k, \text{ pour } z \in (\bar{D}_k)^n \cup (I_{k+2})^n \cup \left(\prod_{j=1}^n M_j^{k+2}\right).$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1991-034-4 Published online by Cambridge University Press

Nous avons montré que les inégalités (3.7) et (3.8) sont vérifiées pour $k = 0, 1$ et la même démarche montre que si elles sont satisfaites pour $j < k$, elles le seront pour $j = k$.

Comme l'inégalité (3.7) est satisfaite pour tout $k$, il en résulte que la suite $(g_i)_{i \geqq 0}$, converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C}^n$. De plus les compacts $(I_i)^n \cup (\prod_{j=1}^n M_j^i)$ forment une exhaustion de $\mathbf{R}^n \cup (\prod_{j=1}^n (\alpha_j + i)\mathbf{R})$. Fixons un indice $i$. Nous pouvons écrire pour $m > i, g_m = g_i + \sum_{\nu=i+1}^n (g_\nu - g_{\nu-1})$. Soit $g$ la limite de la suite $(g_i)$. Comme (3.7) et (3.8) sont satisfaites pour tout $k$, nous avons

$$|g(z) - f(z)| < \sum_{\nu \geqq 0} \epsilon_\nu = 1, \text{ pour } z \in (I_i)^n \cup \left( \prod_{j=1}^n M_j^i \right)$$

Et comme ceci est vrai pour tout indice $i$ nous avons

$$|g(z) - f(z)| < 1, \text{ pour } z \in \mathbf{R}^n \cup \left( \prod_{j=1}^n M_j \right).$$

Ceci complète la preuve du théorème dans le cas où $\epsilon(x) \equiv 1$.

Soit $\epsilon$ une fonction continue et positive sur $M$. Comme la conclusion du théorème est satisfaite pour $\epsilon = 1$, il existe une fonction $g$ holomorphe dans $\mathbf{C}^n$ telleque

$$|-1 + \log \epsilon - g| < 1 \text{ sur } M. \tag{3.9}$$

De (3.9), nous déduisons

$$\operatorname{Re} g < \log \epsilon \text{ sur } M. \tag{3.10}$$

Soit $f$ une fonction continue sur $M$. Le même argument utilisé pour montrer (3.9) nous assure l'existence d'une fonction $h_0$ holomorphe dans $\mathbf{C}^n$ vérifiant

$$|f \exp(-g) - h_0| < 1 \text{ sur } M. \tag{3.11}$$

Posons $h = h_0 \exp(g)$. Alors $h$ est holomorphe dans $\mathbf{C}^n$ et d'aprés (3.10) et (3.11) nous avons

$$|f(p) - h(p)| < \epsilon(p), \text{ pour tout } p \text{ dans } M. \qquad \blacksquare$$

## REFERENCES

1. T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall Inc., 1969.
2. S. N. Mergelyan, *On the representation of functions by series of polynomials on closed sets* (Russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR NS **78** (1951), 405–408. Amer. Math. Soc. Transl. **85** Providence 1953.
3. H. Rossi, *Holomorphically convex sets in several complex variables*, Ann. of Math. **74** (1961), 470–493.
4. S. Scheinberg, *Uniform approximation by entire functions*, J. Anal. Mathématiques **24** (1976), 16–18.
5. N. Sibony, M. Hakim, *Boundary properties of holomorphic functions in the ball in* $\mathbf{C}^n$. Math. Ann. **276** (1988), 549–555.
6. B. M. Weinstock, *On the polynomial convexity of the union of two maximal totally maximal real subspaces of* $\mathbf{C}^n$ Math. Ann. **282** (1988) 131–138.

*Departement de Mathématiques et de Statistique*
*Université de Montréal,*
*Montréal (P.Q) H3C 3J7, Canada*