Can. J. Math., Vol. XXXII, No. 3, 1980, pp. 567–575

UNE GENERALIZATION DU THEOREME DE GINSBURG-ROSE

DANIEL CHAPUT ET GERT SABIDUSSI

1. Introduction et préliminaires. Nous présentons ici une étude relative aux applications entre monoïdes, que nous nommerons transductions, qui peuvent être réalisées par un transducteur (machine séquentielle généralisée). L'exposé s'oriente sur l'examen des conditions caractérisant de telles applications. Le point de départ est le théorème de Ginsburg-Rose [**2**], qui caractérise les transductions entre monoïdes libres de type fini, en termes de quatre conditions dont une, la condition de "bounded output", implique la longueur des mots et, par conséquent, ne peut être formulée que dans un monoïde libre. A l'aide d'un langage propre aux structures algébriques en général, celle des congruences, nous étudions des conditions remplaçant "bounded output", pour généraliser le théorème connu aux monoïdes quelconques et aux monoïdes libres quelconques.

Rappelons qu'un *automate* sur un monoïde S est un triplet $\mathscr{A} = \langle Q, q_0, \delta \rangle$ où Q est un ensemble fini non vide d'états, δ une fonction de transition et $q_0 \in Q$ l'*état initial*. Un sous-ensemble $U \subset S$ est dit *régulier* si et seulement s'il existe un automate $\mathscr{A} = \langle Q, q_0, \delta \rangle$ et $F \subset Q$ tels que $U = \{x \in S : \delta(q_0, x) \in F\}$. On utilisera le fait [**3**] que $U \subset S$ est régulier si et seulement si ind ρ_U est fini, avec ρ_U l'équivalence définie par $x \rho_U y$ si et seulement si $x \backslash U = y \backslash U$, où $x \backslash U = \{z \in S : xz \in U\}$. De plus, ρ_U est une congruence à droite qui *sature* U, c'est-à-dire que U est une union de classes de ρ_U. Finalement ρ_U est le suprémum de toutes les congruences à droite sur S saturant U.

Une application entre monoïdes $\varphi : S \rightarrow T$ est dite *régulière* si et seulement si pour tout $V \subset T$, V régulier implique: $\varphi^{-1}[V]$ régulier dans S.

Un *transducteur* est un quintuplet $\mathscr{M} = \langle Q, S, T, \delta, \lambda \rangle$ où Q est un ensemble non vide fini, S et T sont des monoïdes, $\delta : Q \times S \rightarrow Q$ et $\lambda : Q \times S \rightarrow T$ des applications telles que pour tout $x, y \in S$ et $q \in Q$,

$$\delta(q, xy) = \delta(\delta(q, x), y), \ \lambda(q, xy) = \lambda(q, x)\lambda(\delta(q, x), y),$$
$$\delta(q, e_S) = q \text{ et } \lambda(q, e_S) = e_T$$

(où e_S et e_T sont les éléments neutres de S et T). La fonction δ est dite de *transition* et λ est la *fonction de sortie*.

Reçu le 27 juillet 1978.

On dira qu'une application $\varphi : S \to T$ est une *transduction* si et seulement s'il existe un transducteur $\mathcal{M} = \langle Q, S, T, \delta, \lambda \rangle$ et un $q \in Q$ tels que $\varphi(x) = \lambda(q, x)$ pour tout $x \in S$.

Une transduction entre deux monoïdes quelconques a toujours les trois propriétés suivantes:

(i) $\varphi(e_S) = e_T$ (φ *préserve l'élément neutre*);

(ii) pour tout $x, y \in S$ il existe $w \in T$ tel que $\varphi(xy) = \varphi(x)w$ (ici on dira que φ *préserve les entrées initiales*);

(iii) φ est *régulière*. En effet, on montre facilement que pour tout $V \subset T$ on a

$$\text{ind } \rho_U \leqq r \text{ ind } \rho_V,$$

où $U = \varphi^{-1}[V]$ et r est le nombre d'états d'un transducteur réalisant φ.

2. La version classique du théorème de Ginsburg-Rose. Enonçons le théorème de Ginsburg-Rose [**2**].

(2.0) THEOREME. *Une application $\varphi : A^* \to B^*$ entre monoïdes libres de type fini est une transduction si et seulement si:*

(i) $\varphi(\epsilon) = \epsilon$;

(ii) φ *préserve les entrées initiales;*

(iii) φ *est régulière;*

(iv) *il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $x \in A^*$ et pour tout $a \in A$, on a*

$$|\varphi(xa)| - |\varphi(x)| \leqq N$$

($|x|$ *dénote la longueur du mot* x).

Pour référer à (iv), on dira que φ *a des segments terminaux bornés.*

Cette dernière condition a évidemment l'avantage d'être très facile à vérifier. Par contre, dans une théorie des transductions entre monoïdes quelconques, elle est inutilisable parce qu'elle ne peut être énoncée que pour les monoïdes libres. De plus, même dans le contexte de ces derniers, elle doit être écartée dès qu'on se libère de la restriction de la finitude des deux alphabets A et B. En effet, si A est infini et B quelconque, il existe des homomorphismes de monoïdes $A^* \to B^*$ (sous-classe des transductions) qui n'ont pas de segments terminaux bornés. Dans ce qui suit, nous donnons une interprétation de la condition (iv) qui est indépendante de la finitude de A et B.

Soit $\varphi : A^* \to B^*$ (A et B quelconques) une application préservant les entrées initiales. Pour $a \in A$ on définit l'application $\omega_a : A^* \to B^*$ par

$$(1) \quad \varphi(xa) = \varphi(x)\omega_a(x)$$

(voir, par exemple, [**1**], p. 314). Ensuite notons l'équivalence ker ω_a par σ_a. La famille $(\omega_a)_{a \in A}$ est appellée le *différentiel* de φ.

Si φ est une transduction on obtient pour un certain $q \in Q$

$$\varphi(xa) = \varphi(x)\lambda(\delta(q, x), a),$$

donc $\omega_a(x) = \lambda(\delta(q, x), a)$. Par conséquent, $\omega_a[A^*] \subset \lambda[Q \times A]$ et $\varphi[A^*] \subset (\lambda[Q \times A])^*$ (le sous-monoïde de B^* engendré par $\lambda[Q \times A]$). Donc, si A est fini, alors

$$\text{ind } \sigma_a \leqq |\lambda[Q \times A]| < \infty \text{ pour tout } a \in A$$

et l'image de φ est incluse dans un monoïde libre de type fini.

(2.1) Lemme. *Soit $\varphi: A^* \rightarrow B^*$ une application préservant les entrées initiales. Si A est fini et* ind $\sigma_a < \infty$ *pour chaque $a \in A$ alors φ a des segments terminaux bornés. Si B est fini et φ a des segments terminaux bornés, alors* ind $\sigma_a < \infty$ *pour chaque $a \in A$.*

Démonstration. Si ind $\sigma_a = |\omega_a[A^*]|$ est fini pour chaque $a \in A$ et si A est fini, on prend

$$N = \max \{|y| : y \in \cup_{a \in A} \omega_a[A^*]\}$$

et on obtient bien que $|\varphi(xa)| - |\varphi(x)| = |\omega_a(x)| \leqq N$.

Réciproquement, si N est une borne pour les segments terminaux de φ, alors $|\omega_a(x)| \leqq N$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in A^*$. L'ensemble B étant fini ceci entraîne que $\omega_a[A^*]$ est un ensemble fini.

Il est facile de donner des exemples montrant que les deux parties du lemme deviennent fausses lorsque l'un ou l'autre des deux alphabets est infini.

Une conséquence immédiate du lemme est que dans le théorème de Ginsburg-Rose on peut remplacer la condition que φ ait des segments terminaux bornés par ind $\sigma_a < \infty$ pour tout $a \in A$. C'est sous cette forme que le théorème se prête à plusieurs généralisations.

(2.2) Proposition. *Soit $\varphi: A^* \rightarrow B^*$ une application où A est un ensemble fini et B un ensemble quelconque. Alors φ est une transduction si et seulement si elle vérifie les conditions* (2.0) (i), (ii), (iii) *ainsi que*
(iv) (*conditionnellement à* (ii)) ind $\sigma_a < \infty$ *pour tout $a \in A$.*

Démonstration. La nécessité découle de la discussion qui précède (2.1). Pour la suffisance on remarque que si ind $\sigma_a < \infty$ pour chaque $a \in A$, alors $W = \cup \{\omega_a[A^*] : a \in A\}$ est fini et que $\varphi[A^*] \subset W^*$. Donc $\omega[A^*]$ est incluse dans un monoïde libre de type fini et on se retrouve dans le cas classique du théorème de Ginsburg-Rose.

3. La congruence à droite induite par le différentiel d'une application. Soit $\varphi: S \rightarrow T$ une application quelconque entre monoïdes. Posons $\tau = (\ker \varphi)\downarrow$, où pour une équivalence α sur S, $\alpha\downarrow$ désigne la plus

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-043-1 Published online by Cambridge University Press

grande congruence α droite contenue dans α. Il est clair que $x\tau y$ si et seulement si $\varphi(xz) = \varphi(yz)$ pour tout $z \in S$.

Dans ce qui suit nous supposons que S est un monoïde quelconque, T un monoïde simplifiable à gauche et φ une application préservant les entrées initiales. D'une façon analogue à (1) nous définissons pour tout $z \in S$ l'application $\omega_z : S \to T$ par

$$(2) \quad \varphi(xz) = \varphi(x)\omega_z(x).$$

Soit maintenant l'équivalence $\zeta = \bigcap_{z \in S} \sigma_z$, où $\sigma_z = \ker \omega_z$. T étant simplifiable à gauche on vérifie facilement que pour tout $x, y, z \in S$ on a

$$(3) \quad \omega_{yz}(x) = \omega_y(x)\omega_z(xy).$$

Ceci entraîne que ζ est une congruence à droite. Nous dirons que ζ est la congruence à droite induite par le différentiel de φ. D'après (2) on a immédiatement que $\zeta \cap \ker \varphi = \tau$.

Le théorème suivant caractérise les transductions en termes de ζ.

(3.1) Theoreme. *Une application $\varphi : S \to T$, avec T simplifiable à gauche, est une transduction si et seulement si:*

(i) $\varphi(e_S) = e_T$;

(ii) φ *préserve les entrées initiales;*

(iii) (*conditionnellement à* (ii)) ind ζ *est fini.*

Démonstration. Soit φ une transduction et $\mathcal{M} = \langle Q, S, T, \delta, \lambda \rangle$ un transducteur réalisant φ avec q comme état initial. Définissons une équivalence α sur S par

$$x\alpha y \Leftrightarrow \delta(q, x) = \delta(q, y),$$

et montrons que $\alpha \subset \zeta$. Soit $x\alpha y$. Alors pour tout $z \in S$ on a

$$\omega_z(x) = \lambda(\delta(q, x), z) = \lambda(\delta(q, y), z) = \omega_z(y);$$

donc ind $\zeta \leqq$ ind $\alpha \leqq |Q|$.

Réciproquement, supposons que ind $\zeta < \infty$. Notons $\bar{x}$ la classe $\zeta[x]$ et soit $\mathcal{M} = \langle S/\zeta, S, T, \delta, \lambda \rangle$ un transducteur où $\delta : S/\zeta \times S \to S/\zeta$ est définie par $\delta(\bar{x}, y) = \bar{x}\bar{y}$ et $\lambda : S/\zeta \times S \to T$ est définie par $\lambda(\bar{x}, y) = \omega_y(x)$.

ζ étant une congruence à droite, δ est bien une fonction de transition. L'application λ est bien définie par la définition de ζ. Vérifions que λ est une fonction de sortie:

$$\lambda(\bar{x}, e_S) = \omega_{e_S}(x) = e_T$$

et (3) se traduit par $\lambda(\bar{x}, yz) = \lambda(\bar{x}, y)\lambda(\delta(\bar{x}, y), z)$. Alors $\varphi(x) = \lambda(\bar{e}_S, x)$, donc $\mathcal{M}$ réalise φ.

4. Monoïdes libres de type quelconque. La condition (3.1) (iii) est évidemment assez exigeante. Nous l'analyserons donc dans le contexte des monoïdes libres, dans le but d'examiner le cas où le monoïde des entrées est de type quelconque. Dans ce qui suit, nous considérons toujours une application $\varphi : A^* \to B^*$ préservant les entrées initiales. Sans perdre de généralité on peut toujours supposer que $\varphi(\epsilon) = \epsilon$. Car sinon, on modifie φ en posant $\varphi'(\epsilon) = \epsilon$, $\varphi'(x) = \varphi(x)$ si $x \neq \epsilon$. On vérifie alors aisément que φ' préserve les entrées initiales et que φ' est régulière si et seulement si φ l'est.

Soit $\sigma = \bigcap_{a \in A} \sigma_a$. Comme $\zeta \subset \sigma$ on a évidemment que $\operatorname{ind} \zeta < \infty$ entraîne $\operatorname{ind} \sigma < \infty$. Dans cette section nous donnerons une condition qui garantit la validité de l'implication réciproque. Signalons d'abord qu'en général $\operatorname{ind} \sigma < \infty$ n'implique pas que $\operatorname{ind} \zeta < \infty$. Pour cela il suffit simplement de remarquer que si A est fini, alors la condition que $\operatorname{ind} \sigma < \infty$ est équivalente à (2.0) (iv). Donc $\operatorname{ind} \zeta$ est infini pour toute fonction entre deux monoïdes de type fini qui vérifie (2.0) (i), (ii), (iv) sans vérifier (iii). Un exemple d'une telle fonction est donné en [**2**], p. 384.

Dans le cas d'un alphabet d'entrée infini nous n'avons pas réussi à résoudre la question à savoir si pour une fonction φ vérifiant (2.0) (i), (ii) et $\operatorname{ind} \sigma < \infty$, la régularité de φ entraîne que φ est une transduction. La proposition suivante suggère une alternative: remplacer la régularité de φ par la régularité de son différentiel.

(4.1) PROPOSITION. *Si $\varphi : S \to T$ est une transduction avec S quelconque et T simplifiable à gauche, alors ω_z est une application fortement régulière pour chaque $z \in S$.*

φ est dite *fortement régulière* si et seulement si pour tout $V \subset T$, $\varphi^{-1}[V]$ est régulier dans S.

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \langle Q, S, T, \delta, \lambda \rangle$ un transducteur réalisant φ. L'image de chaque ω_z étant finie, il suffit de montrer que pour chaque $y \in \omega_z[S]$, $\omega_z^{-1}[\{y\}] = U$ est un ensemble régulier. On sait que

$$\omega_z(x) = \lambda(\delta(q, x), z).$$

Si on pose $Q_y = \{p \in Q : \lambda(p, z) = y\}$, alors $U = \{x : \delta(q, x) \in Q_y\}$ est régulier par définition.

(4.2) THEOREME. *Soit A un alphabet quelconque. Si $\omega_a : A^* \to B^*$ est une application régulière pour chaque $a \in A$, alors* $\operatorname{ind} \sigma < \infty$ *implique que* $\operatorname{ind} \zeta < \infty$.

La démonstration de ce théorème est basée sur les lemmes qui suivent.

Pour $r \geqq 1$ soit $\mathscr{E}_r$ l'ensemble des équivalences d'indice inférieur ou égal à r sur un ensemble S. Le fait que $\mathscr{E}_r$ a la propriété de la chaîne descendante entraîne que si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille d'équivalences sur S avec $\bigcap_{i\in I} \alpha_i \in \mathscr{E}_r$, alors il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que

(4) $\quad \bigcap_{i\in I} \alpha_i = \alpha_{i_1} \cap \ldots \cap \alpha_{i_n}.$

(4.3) LEMME. *Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille d'équivalences sur un monoïde S. Si pour tout $i \in I$ chaque α_i-classe est régulière, alors*

$$\operatorname{ind} \bigcap_{i\in I} \alpha_i < \infty \Rightarrow \operatorname{ind} \bigcap_{i\in I} \alpha_i\downarrow < \infty.$$

Démonstration. Soit $r = \operatorname{ind} \alpha$, où $\alpha = \bigcap_{i\in I} \alpha_i$. Donc $\alpha_i \in \mathscr{E}_r$ pour tout $i \in I$. Par (4) il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que

$$\alpha = \bigcap_{k=1}^{n} \alpha_{i_k}.$$

Comme $\alpha[x] = \bigcap_{k=1}^{n} \alpha_{i_k}[x]$, $\alpha[x]$ est donc régulière pour tout $x \in S$.

Soit alors $U_1, \ldots, U_m$ les α-classes et soit $\rho = \bigcap_{i=1}^{m} \rho_{U_i}$. L'indice de ρ est fini puisque chaque $\operatorname{ind} \rho_{U_i}$ est fini. De plus, ρ est une congruence à droite qui sature chaque U_i, donc $\rho \subset \alpha$ et aussi $\rho \subset \alpha\downarrow$. On a bien alors $\operatorname{ind} \alpha\downarrow \leqq \operatorname{ind} \rho < \infty$; c'est-à-dire $\operatorname{ind} \bigcap_{i\in I} \alpha_i\downarrow < \infty$.

Note. On peut facilement montrer que $(\bigcap_{i\in I} \alpha_i)\downarrow = \bigcap_{i\in I} \alpha_i\downarrow$.

(4.4) LEMME. *Si T est simplifiable à gauche et $\varphi: S \rightarrow T$ préserve les entrées initiales, alors $\zeta = \sigma\downarrow$.*

Démonstration. $\sigma \supset \zeta$ entraîne $\sigma\downarrow \supset \zeta\downarrow = \zeta$. A montrer donc que $\bigcap_{a\in A} \sigma_a\downarrow \subset \zeta$. Soit $(x, y) \in \bigcap_{a\in A} \sigma_a\downarrow$ et $z = a_1 \ldots a_n$, $a_1, \ldots, a_n \in A$. Alors

$$\begin{aligned}\omega_z(x) &= \omega_{a_1\ldots a_n}(x) = \omega_{a_1}(x)\omega_{a_2}(xa_1) \ldots \omega_{a_n}(xa_1 \ldots a_{n-1}) \\ &= \omega_{a_1}(y)\omega_{a_2}(ya_1) \ldots \omega_{a_n}(ya_1 \ldots a_{n-1}) = \omega_{a_1\ldots a_n}(y) = \omega_z(y).\end{aligned}$$

Démonstration de (4.2). Chaque ω_a, $a \in A$, est une application régulière et $\operatorname{ind} \sigma_a \leqq \operatorname{ind} \sigma < \infty$ pour tout $a \in A$. Donc $\omega_a[A^*]$ est fini et

$$\sigma_a[x] = \omega_a^{-1}[\omega_a(x)],$$

est régulier puisque $\{\omega_a(x)\}$ est régulier; alors par (4.3) et (4.4) $\operatorname{ind} \zeta < \infty$.

Il est clair que dans la démonstration de (4.4) et de (4.2) nous n'avons pas vraiment utilisé le fait que S est libre sur A mais seulement que A engendre S. De plus, (4.2) reste vrai si on remplace B^* par un monoïde simplifiable à gauche dont toute partie finie est régulière. Nous avons donc:

(4.5) THEOREME. *Soit S un monoïde quelconque, A un ensemble de générateurs de S, T un monoïde simplifiable à gauche dont toute partie finie est régulière. Si $\omega_a: S \rightarrow T$ est une application régulière pour chaque $a \in A$, alors* $\operatorname{ind} \bigcap_{a\in A} \sigma_a < \infty$ *implique que* $\operatorname{ind} \zeta < \infty$.

Signalons également que dans (4.2) la condition que ind $\sigma < \infty$ ne peut être remplacée par ind $\sigma_a < N$ pour tout $a \in A$. En effet, pour $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ un alphabet dénombrable, notons $x_0, x_1, \ldots$ les éléments de A^* et définissons ω_{a_i} comme étant la fonction charactéristique du singleton $\{x_i\}$, $i \in \mathbf{N}$. Alors chaque ω_{a_i} est régulière, ind $\sigma_{a_i} = 2$, mais σ est l'identité sur A^*.

5. Régularité d'une application et de son différentiel. Il est clair, d'après le résultat principal de la section précédente, qu'il serait souhaitable de connaître le lien, s'il y en a, entre la régularité de φ et de la régularité de son différentiel. Nous montrons dans cette section que les deux propriétés sont indépendantes. Nous montrons d'abord (5.1) que la régularité de tous les membres de la famille $(\omega_a)_{a \in A}$ n'entraîne pas la régularité de φ; ensuite nous donnons un exemple (5.5) montrant qu'en général l'implication réciproque est également fausse. Dans les deux cas, il s'agit d'applications pour lesquelles ind σ est infini. Pour ce qui est de l'exemple (5.1) ceci découle de (4.2) et (3.1). Quant à l'implication réciproque, voir la remarque qui précède (4.1). La méthode de construction de l'exemple (5.5) est d'un certain intérêt dépassant le contexte restreint dans lequel nous l'employons. Nous utilisons une classe de sous-ensembles d'un monoïde ayant la propriété que chaque application dont l'image appartient à la classe en question, est automatiquement régulière.

(5.1) *Exemple.* Soit A un alphabet infini et soit l'homomorphisme de monoïdes $\omega_a : A^* \to A^*$ défini par sa restriction à A:

$$\omega_a(a) = a,\ \omega_a(a') = \epsilon \text{ si } a' \in A - \{a\}.$$

Alors considérant l'application $\varphi : A^* \to A^*$ induite par cette famille d'applications ω_a, $a \in A$, c'est-à-dire

$$\varphi(a_1 \ldots a_n) = \omega_{a_1}(\epsilon)\omega_{a_2}(a_1)\omega_{a_3}(a_1a_2) \ldots \omega_{a_n}(a_1 \ldots a_{n-1}),$$

on a que φ n'est pas régulière. De fait, sachant que le singleton $\{\epsilon\}$ est un sous-ensemble régulier de A^*, on montre que $U = \varphi^{-1}[\{\epsilon\}]$ est non régulier.

Pour $w \in A^*$, notons L_w l'ensemble de lettres différentes faisant partie du mot w. On a alors que $U = \{u \in A^* : |L_u| = |u|\}$. Pour déterminer ind ρ_U on remarque que

$$x \backslash U = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } x \notin U \\ U_x, & \text{si } x \in U, \end{cases}$$

où $U_x = \{z \in U : L_z \cap L_x = \emptyset\}$. Il y a autant de tels ensembles U_x qu'il y a de sous-ensembles de A, donc ind $\rho_U = 2^{|A|}$. Dans cet exemple, $\omega_a[A^*]$ est infini; donc ind σ_a aussi, et ceci même si A est fini.

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-043-1 Published online by Cambridge University Press

Pour obtenir maintenant une démonstration du fait que la régularité de φ n'implique pas que les applications ω_a, $a \in A$, doivent être régulières, nous utilisons les définitions et propriétés suivantes.

(5.2) *Définition.* Soit α une équivalence sur un monoïde S. Alors $A \subset S$ est dit *α-épars* si et seulement s'il existe un $x \in S$ et un ensemble fini $F \subset A$ tels que $A \backslash F \subset \alpha[x]$; c'est-à-dire A est presqu'entièrement contenu dans une classe de α. A est dit *épars* si et seulement si A est α-épars pour toute congruence α d'indice fini.

Tout ensemble fini d'un monoïde est épars et il en est de même pour tout sous-ensemble d'un ensemble épars. Voici deux exemples d'ensembles épars infinis dans le monoïde additif $\mathbf{N}$ que nous utiliserons par la suite:

$$\{\mathrm{PPCM}\{1, \ldots, m\} : m \geqq 1\} \text{ et } \{m! : m \geqq 1\}.$$

En effet, si α_m dénote la relation de congruence mod m, on sait que dans $\mathbf{N}$ toute congruence est de la forme $\alpha_{m,n}$, $m > 0$, $n \geqq 0$, où

$$\alpha_{m,n}[k] = \{k\}, \text{ si } k < n,$$

et

$$\alpha_{m,n}[k] = \alpha_m[k] \backslash \{0, \ldots, n-1\}, \text{ si } k \geqq n.$$

(5.3) LEMME. *Un ensemble $A \subset \mathbf{N}$ est épars si et seulement si A est α_m-épars pour tout $m \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. Nous démontrons la suffisance seulement. Soit $\alpha_{m,n}$ une congruence. Par hypothèse, il existe un x_m et un ensemble fini $F \subset A$ tels que $A \backslash F \subset \alpha_m[x_m]$, où on peut supposer que $n \leqq x_m < n + m$. Soit

$$F' = F \cup (A \cap \{0, \ldots, n-1\}).$$

Alors F' est fini et

$$A \backslash F' \subset \alpha_m[x_m] \backslash \{0, \ldots, n-1\} = \alpha_{m,n}[x_m],$$

c'est-à-dire A est $\alpha_{m,n}$-épars.

Donc, soit $x \in \mathbf{N}$ et soit $\beta_m = \alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Choisissant $a_1, a_2, \ldots$, successivement de façon que $a_m \in \beta_m[x]$ pour chaque m, avec $a_m \neq a_1, \ldots, a_{m-1}$, ce qui est possible puisque $\beta_m[x]$ est infini, l'ensemble $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ est alors épars. On remarque finalement que $\beta_m = \alpha_{\mathrm{PPCM}\{1,\ldots,m\}}$, d'où la justification des exemples donnés.

(5.4) PROPOSITION. *Soient S, T deux monoïdes, où S est tel que toutes ses parties finies sont régulières. Alors, pour qu'une application $\varphi : S \rightarrow T$ soit régulière, il est suffisant d'avoir:* (i) *$\varphi^{-1}[F]$ fini, pour tout F fini dans T;* (ii) *$\varphi[S]$ épars dans T.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\varphi^{-1}[\alpha[y]]$ est régulier pour tout $y \in T$ et α une congruence à droite sur T d'indice fini (puisque tout régulier dans T est réunion de telles classes). On a qu'il existe un $x \in T$

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-043-1 Published online by Cambridge University Press

et $F \subset \varphi[S]$ tels que $\varphi[S] \backslash F \subset \alpha[x]$. Alors

$$\varphi^{-1}[\alpha[x]] \supset \varphi^{-1}[\varphi[S] \backslash F] = S \backslash \varphi^{-1}[F].$$

Par (i) et le fait que les parties régulières d'un monoïde forment une algèbre de Boole, on a que $S \backslash \varphi^{-1}[F]$ est régulier. Si $\alpha[y] \neq \alpha[x]$, alors

$$\varphi^{-1}[\alpha[y]] \subset \varphi^{-1}[F],$$

c'est-à-dire $\varphi^{-1}[\alpha[y]]$ est fini, donc régulier. Pour le cas $\varphi^{-1}[a[x]]$, on a qu'il existe un ensemble fini $F' \subset F$ tel que $\varphi^{-1}[\alpha[x]] = S \backslash \varphi^{-1}[F']$ qui est régulier par les deux mêmes raisons que précédemment.

(5.5) *Exemple.* φ régulière n'implique pas que les applications ω_a, $a \in A$, doivent être régulières.

Soit $A = \{a_0, a_1, \ldots\} \subset \mathbf{N}$ un ensemble épars infini tel que $0 < a_i < a_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, et soit $U = \{u_0, u_1, \ldots\} \subset \mathbf{N}$ un ensemble infini tel que $u_i < u_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

Puisque $\mathbf{N}$ est libre sur $\{1\}$, on définit la seule application ω_1 par

$$\omega_1(x) = \begin{cases} a_i - a_{i-1}, \text{ si } x = u_i, \ (a_{-1} = 0) \\ 0, \text{ si } x \notin U. \end{cases}$$

Alors $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ est donc donnée par

$$\varphi(n) = \sum_{x<n} \omega_1(x) = \sum_{u_i<n} (a_i - a_{i-1}) = a_j,$$

où j est l'indice vérifiant $u_j < n \leqq u_{j+1}$. On remarque que $\varphi^{-1}[F]$ est fini pour toute partie finie $F \subset \mathbf{N}$, car $\varphi^{-1}[F] = \bigcup \{\varphi^{-1}[\{k\}] : k \in F\}$ et

$$\varphi^{-1}[\{k\}] = \begin{cases} \emptyset, \text{ si } k \notin A \\ \{u_i + 1, \ldots, u_{i+1}\}, \text{ si } k = a_i \\ \{0, \ldots, u_0\}, \text{ si } k = 0. \end{cases}$$

De plus, $\varphi[\mathbf{N}] = A$ qui est épars; donc φ est régulière par (5.4). Signalons que la régularité de φ provient de A et est indépendante de U.

Supposons à présent que U est non régulier et considérons le régulier $\{0\}$. On a que $\omega_1{}^{-1}[\{0\}] = \mathbf{N} \backslash U$ qui, forcément, est non régulier. Donc ω_1 n'est pas régulière.

Bibliographie

1. S. Eilenberg, *Automata, languages, and machines*, Volume A (Academic Press, New York and London, 1974).
2. S. Ginsburg and G. F. Rose, *A characterization of machine mappings*, Can. J. Math. *18* (1966), 381–388.
3. A. Nerode, *Linear automaton transformation*, Proc. Amer. Math. Soc. *9* (1958), 541–544.

CEGEP de Joliette,
Joliette, Québec;
Université de Montréal,
Montréal, Québec

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-043-1 Published online by Cambridge University Press