Can. J. Math., Vol. XXXIV, No. 4, 1982, pp. 853–882

OPERATEUR DE STOKES DANS DES ESPACES DE SOBOLEV A POIDS SUR DES DOMAINES ANGULEUX

MONIQUE DAUGE

Introduction. Rappelons que l'opérateur de Stokes associe au couple vitesse-pression $(\vec{W}, p)$ le couple force-divergence $(\vec{F}, g)$ par:

$$-\Delta\vec{W} + \overrightarrow{\text{grad}}\, p = \vec{F}$$
$$\text{div}\, \vec{W} = g.$$

Nous nous plaçons ici en dimension 2. $\vec{W} = (w_1, w_2)$, $\vec{F} = (f_1, f_2)$. Voici l'écriture matricielle de l'opérateur:

$$\begin{pmatrix} -\Delta & 0 & D_x \\ 0 & -\Delta & D_y \\ D_x & D_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g \end{pmatrix}$$

ce que nous noterons: $\mathscr{S}\mathscr{U} = \mathscr{G}$.

Ce système est elliptique au sens de [**1**] sur un domaine Ω avec les conditions complémentaires: $w_1{}_{|\partial\Omega} = 0$, $w_2{}_{|\partial\Omega} = 0$ (Dirichlet); c'est donc ce problème que nous étudions ici.

Nous savons que pour obtenir des résultats pour un domaine polygonal, il est utile d'avoir étudié un problème "modèle" sur le secteur plan: nous nous référons particulièrement à Kondrat'ev [**5**] (étude générale de problèmes elliptiques), Kellogg et Osborn [**4**] (étude du problème de Stokes avec données L^2), Grisvard [**2**] (étude du problème de Stokes avec divergence nulle pour des données H^m).

Ici, nous allons réaliser cette étude de manière systématique, comme l'a déjà fait Pham The Lai pour le laplacien [**7**], en utilisant les espaces à poids double $H^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}$ introduits par lui, qui généralisent les espaces $\mathring{W}_\alpha{}^k$ de Kondrat'ev. Dans le même ordre d'idée, citons l'étude du problème bi-harmonique par Guillement [**3**] et celle du laplacien pour les espaces $L^p_{\gamma_0\gamma_\infty}(\Omega)$ par Steux [**8**] (cadre non hilbertien).

Notre méthode de travail est inspirée de celles de Kondrat'ev [**5**], Kellogg et Osborn [**4**], Grisvard [**2**] et Guillement [**3**].

Ensuite, nous traiterons de l'opérateur de Stokes sur un polygone, dans les espaces à poids $\Pi_\gamma{}^m$ construits à partir des espaces à poids sur le secteur. La décomposition de la solution en parties régulière et singulière pour une valeur particulière du poids a dejà été exprimée par Osborn [**6**].

Reçu le 10 mars 1981.

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

Voici un plan schématique de l'article: les §§ 1–6 sont consacrés au secteur; les §§ 7–11 au polygone. Nous introduisons les notations clés pour le secteur dans le § 1. Dans les §§ 2, 3, 4 nous poursuivons l'étude d'un système paramétré pour arriver à la démonstration, au § 5, des résultats fondamentaux. Au § 6, nous traitons un cas important qui n'entre pas dans le cadre d'application des théorèmes du § 5. Nous introduisons les notations relatives au polygone au § 7. Nous démontrons au § 8 les théorèmes généraux d'image fermée et de décomposition des solutions en parties régulière et singulière. Au § 9, nous établissons des théorèmes d'existence de solutions dans les espaces à poids, dans et en dehors du cadre de résolution du problème variationnel, en nous basant sur les résultats de Temam [**9**] pour le cadre variationnel. Nous obtenons au § 10 les théorèmes d'indice. Enfin, au § 11, nous traitons le cas particulier qui correspond à celui du § 6 sur le secteur.

Dans un prochain travail, nous traiterons de l'opérateur de Stokes dans les Sobolev ordinaires H^m.

1. Position du problème. Ω désigne un secteur plan de sommet 0, de côté $0x$ et d'ouverture ω.

Rappelons la définition des espaces:

$$(1.1)\quad H^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega) = \{u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega),\ r^{\gamma_0 - m + |\alpha|}(1+r)^{\gamma_\infty - \gamma_0} D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leqq m\}$$

avec $m \in \mathbf{N}$ et $\gamma_0 \leqq \gamma_\infty$.

Par transformation conforme $(x, y) \rightarrow (t, \theta)$ (avec, donc, $x = e^t \cos \theta$ et $y = e^t \sin \theta$) Ω devient la bande $B = \mathbf{R} \times]0, \omega[$;

(1.2) $H^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$ est transformé en l'espace $H^m_{\gamma_0 - m+1, \gamma_\infty - m+1}(B)$ où

$$(1.3)\quad H^m_{\theta_0,\theta_\infty}(B) = \{u \in L^2_{\text{loc}}(B)/e^{\theta_0 t}(1+e^t)^{\theta_\infty - \theta_0} u \in H^m(B)\}.$$

Notons qu'ici le poids ne dépend plus de l'ordre de dérivation. On peut facilement définir une notion de trace sur ces espaces, et ainsi, par transport, obtenir une définition cohérente de la trace pour les $H^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$. Comme nous voulons étudier l'opérateur $\mathscr{S}$ avec conditions nulles aux bords, nous introduisons les espaces suivants, adaptés à $\mathscr{S}$:

$$(1.4)\quad D^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega) = \left\{(w_1, w_2, p) \in H^{m+2}_{\gamma_0,\gamma_\infty} \times H^{m+2}_{\gamma_0,\gamma_\infty} \times H^{m+1}_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)/w_{1_{|\partial\Omega}} = 0,\ w_{2_{|\partial\Omega}} = 0\right\}$$

$$(1.5)\quad E^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega) = H^m_{\gamma_0,\gamma_\infty} \times H^m_{\gamma_0,\gamma_\infty} \times H^{m+1}_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega).$$

$\mathscr{S}$ envoie $D^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$ dans $E^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$. Notons-le $\mathscr{S}^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}$. Nous verrons que l'indice de $\mathscr{S}^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}$ est conditionné par:

i) les valeurs caractéristiques des espaces:

$$(1.6) \qquad \eta_0 = \gamma_0 - (m+1) \quad \eta_\infty = \gamma_\infty - (m+1)$$

ii) la fonction discriminante du problème de Stokes pour l'ouverture ω:

$$(1.7) \qquad F(\tau) = \frac{\operatorname{sh}^2 \tau\omega - \tau^2 \sin^2 \omega}{\tau^2}$$

(Théorème 5.1).

Nous verrons aussi qu'un $\mathcal{G} \in E^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$ admet en général des antécédents par $\mathcal{S}$ dans des espaces "plus gros" que $D^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$ et quelles relations existent entre ces antécédents (Théorème 5.3).

Nous avons aussi un résultat de régularité (Théorème 5.2).

Nous améliorons enfin les résultats prévus par ces théorèmes pour les cas η_0 ou $\eta_\infty = -1$ dans le Théorème 6.1.

2. Transformation du problème.

2.1. *Transformation conforme.* Nous avons vu qu'elle simplifie les espaces.

Notons $u \to \tilde{u}$ le changement de variables: $u(x, y) = \tilde{u}(t, \theta)$.

Il est en plus convenable d'effectuer les changements de fonctions suivants:

$$(2.1) \qquad (w_1, w_2, p) \to (U, V, Q) \quad \text{où}$$
$$U = \tilde{w}_1 \cos\theta + \tilde{w}_2 \sin\theta \quad \text{(radial)}$$
$$V = -\tilde{w}_1 \sin\theta + \tilde{w}_2 \cos\theta \quad \text{(tangentiel)}$$
$$Q = e^t \tilde{p}$$

$$(2.2) \qquad (f_1, f_2, g) \to (H_1, H_2, H_3) \quad \text{où}$$
$$H_1 = (\tilde{f}_1 \cos\theta + \tilde{f}_2 \sin\theta) e^{2t}$$
$$H_2 = (-\tilde{f}_1 \sin\theta + \tilde{f}_2 \cos\theta) e^{2t}$$
$$H_3 = \tilde{g} e^t.$$

On définit des espaces $D^m_{\theta_0,\theta_\infty}(B)$ et $E^m_{\theta_0,\theta_\infty}(B)$ sur le même modèle que $D^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$ en (1.4) et $E^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$ en (1.5).

A l'aide de (1.2) on voit facilement que:

(2.1) définit un isomorphisme $\chi_D : D^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega) \to D^m_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$

(2.2) définit un isomorphisme $\chi_E : E^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega) \to E^m_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$

où η_0 et η_∞ sont définis en (1.6).

D'autre part, $\mathcal{S}(w_1, w_2, p) = (f_1, f_2, g)$ devient:

$$(2.3) \qquad \tilde{\mathcal{S}}(U, V, Q) = (H_1, H_2, H_3), \text{ noté aussi } \tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{G}};$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

où:

$$\begin{aligned}
&-D_t^2U - D_\theta^2U + U + 2D_\theta V + D_tQ - Q = H_1\\
&-D_t^2V - D_\theta^2V + V - 2D_\theta U + D_\theta Q = H_2\\
&D_tU + U + D_\theta V = H_3.
\end{aligned}$$

L'étude de $\mathscr{S}^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}$ se ramène à celle de $\tilde{\mathscr{S}}^m_{\eta_0,\eta_\infty}$: on se donne $\tilde{\mathscr{G}}$ dans $E^m_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$ et on lui cherche des antécédents.

2.2. *Transformation de Fourier partielle par rapport à $t \in \mathbf{R}$.* Notons-la $\mathscr{F}$.

On raisonne par conditions nécessaires: on suppose qu'il existe $\tilde{\mathscr{U}}$ dans $D^m_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$ tel que $\tilde{\mathscr{S}}\tilde{\mathscr{U}} = \tilde{\mathscr{G}}$.

Or, une propriété importante de $H^k_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$ est que:

$$\text{(2.4)}\qquad \text{si } v \in H^k_{\eta_0,\eta_\infty}(B)\begin{cases}\forall\eta \in [\eta_0, \eta_\infty] & e^{\eta t}v \in H^k(B)\\ \forall\eta \in \,]\eta_0, \eta_\infty[& e^{\eta t}v \in L^1(B)\end{cases}$$

ce qui permet de définir pour tout $\tau \in C_{\eta_0,\eta_\infty}$ avec:

(2.5) $\quad C_{\eta_0,\eta_\infty} = \{\tau \in \mathbf{C},\ \tau = \xi + i\eta \text{ et } \eta \in [\eta_0, \eta_\infty]\}$,

(2.6) $\quad \mathscr{F}v(\tau, \theta) = \mathscr{F}(ve^{\eta t})(\xi, \theta)$ (c'est ici qu'intervient $\theta_0 \leqq \theta_\infty$).

(2.7) $\quad$ La fonction $\tau \to \mathscr{F}v(\tau, \cdot\,)$ est analytique à valeurs dans $H^k(]0, \omega[)$ et

(2.8) $\quad \mathscr{F}(D_t^jD_\theta^kv) = (i\tau)^jD_\theta^k(\mathscr{F}v)$.

$\mathscr{F}$ appliqué à $\tilde{\mathscr{S}}\tilde{\mathscr{U}} = \tilde{\mathscr{G}}$ donne, à l'aide de (2.8) un système à une variable (θ) paramétré en $\tau \in C_{\eta_0,\eta_\infty}$:

$$B_\tau(u(\tau, \cdot\,); v(\tau, \cdot\,); q(\tau, \cdot\,)) = (h_1(\tau, \cdot\,); h_2(\tau, \cdot\,); h_3(\tau, \cdot))$$

où

$$u = \mathscr{F}U, \text{ etc.} \ldots$$

On obtient une simplification en posant:

$$\text{(2.9)}\qquad \begin{cases} l_1 = -h_1 + 2h_3\\ l_2 = h_2 + D_\theta h_3\\ l_3 = h_3.\end{cases}$$

On a alors:

$$\text{(2.10)}\qquad \begin{cases} u'' + (i\tau + 1)^2u + (1 - i\tau)q = l_1\\ (i\tau - 1)u' + (\tau^2 + 1)v + q' = l_2\\ (i\tau + 1)u + v' = l_3.\end{cases}$$

$(u, v, q) \to (l_1, l_2, l_3)$ définit un opérateur

$$\mathscr{C}_\tau : H^1 \times H^1 \times L^2 \to H^{-1} \times H^{-1} \times L^2(]0, \omega[).$$

Les conditions aux bords initiales donnent:

$$u,\, v \in H_0^1(]0,\, \omega[).$$

Il est naturel de définir S_τ, restriction de $\mathscr{C}_\tau$ à $H_0^1 \times H_0^1 \times L^2(]0,\, \omega[)$. On a donc la condition nécessaire:

$$(2.11) \quad \forall \tau \in C_{\eta_0,\eta_\infty} \quad S_\tau(u(\tau,\cdot\,);v(\tau,\cdot\,);q(\tau,\cdot\,)) \\ = (l_1(\tau,\cdot\,);l_2(\tau,\cdot\,);l_3(\tau,\cdot\,)).$$

Inversement, connaissant $(l_1,\, l_2,\, l_3)$ à partir de $\mathscr{G}$ par (2.9), on va chercher, pour chaque τ dans C_{η_0,η_∞}, $(u_\tau,\, v_\tau,\, q_\tau)$ tel que:

$$(2.12) \quad S_\tau(u_\tau,\, v_\tau,\, q_\tau) = (l_1,\, l_2,\, l_3)(\tau,\cdot\,).$$

3. Résolvante de S_τ. A. Dans un premier temps on cherche un inverse à droite à $\mathscr{C}_\tau$, noté $\mathscr{R}_\tau$, (pas de conditions aux bords), de façon analytique en τ. Pour $(l_1, l_2, l_3) \in H^{-1} \times H^{-1} \times L^2$, il s'agit de construire $(u,\, v,\, q) \in H^1 \times H^1 \times L^2$ tel que

$$\mathscr{C}_\tau(u,\, v,\, q) = (l_1,\, l_2,\, l_3).$$

Pour avoir un système du premier ordre à coefficients constants, on fait le changement de fonctions:

$$y_1 = u;\, y_2 = u';\, y_3 = q;\, y_4 = v,$$

et $\mathscr{C}_\tau(u,\, v,\, q) = (l_1,\, l_2,\, l_3)$ équivaut à:

$$(3.1) \quad Y' = A(\tau)Y + B$$

où

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(i\tau+1)^2 & 0 & i\tau - 1 & 0 \\ 0 & 1 - i\tau & 0 & -(\tau^2+1) \\ -(i\tau+1)^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On résout (3.1) par la méthode de variation des constantes.

Les $e^{A(\tau)\theta}.\, e_j = X_j(\tau,\, \theta)$ pour $j \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$ forment une base de l'espace des solutions du système homogène associé à (3.1), avec $(e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4)$ base canonique de $\mathbf{C}^4$. Les X_j sont analytiques en τ et C^∞ en θ. On cherche des $C_j(\theta)$ tels que

$$Y(\theta) = \sum_{j=1}^{4} C_j(\theta)X_j(\tau,\, \theta).$$

On est donc amené à résoudre:

$$(3.2) \qquad \sum_{j=1}^{4} d_j(\theta) X_j(\tau, \theta) = B(\theta)$$

en les d_j puis à intégrer les d_j pour obtenir les C_j. Le déterminant du système (3.2) est le wronskien des X_j. Il est analytique en τ et ne s'annule pas. Les solutions du système (3.2) sont donc obtenues de manière analytique en τ. Quant à l'intégration des d_j, il suffit de remarquer qu'il existe une application linéaire continue

$$I : H^{-1}(]0, \omega[) \to L^2(]0, \omega[)$$

qui relève la dérivation. I est aussi continue de $H^m \to H^{m+1}$, $\forall m \in \mathbf{N}$. Cela achève la construction de $\mathscr{R}_\tau \cdot \tau \to \mathscr{R}_\tau$ est analytique à valeurs dans tous les

$$\mathscr{L}(H^m \times H^m \times H^{m+1}, H^{m+2} \times H^{m+2} \times H^{m+1}), m \geqq -1.$$

B. Dans un deuxième temps, il s'agit de corriger $\mathscr{R}_\tau(l_1, l_2, l_3)$ pour obtenir un élément $(u, v, q) \in H_0^1 \times H_0^1 \times L^2(]0, \omega[)$ tel que

$$S_\tau(u, v, q) = (l_1, l_2, l_3).$$

Posons $\mathscr{R}_\tau(l_1, l_2, l_3) = (u_0, v_0, q_0)$. Il s'agit de trouver (u_*, v_*, q_*) dans Ker $\mathscr{C}_\tau$ tel que

$$(3.3) \qquad (u_0, v_0, q_0) - (u_*, v_*, q_*) \in H_0^1 \times H_0^1 \times L^2(]0, \omega[).$$

Pour cela on exhibe une base de Ker $\mathscr{C}_\tau$. On remarque que, si $\tau \neq i$ et $\tau \neq -i$, $\mathscr{C}_\tau(u, v, q) = 0$ équivaut à (3.4)–(3.6):

$$(3.4) \qquad u = -\frac{v'}{i\tau + 1}$$

$$(3.5) \qquad q = \frac{v^{(3)} + (i\tau + 1)^2 v'}{\tau^2 + 1}$$

$$(3.6) \qquad v^{(4)} + 2(1 - \tau^2)v^{(2)} + (\tau^2 + 1)^2 v = 0.$$

$e^{i\theta} \operatorname{sh} \tau\theta$, $e^{-i\theta} \operatorname{sh} \tau\theta$, $e^{i\theta} \operatorname{ch} \tau\theta$, $e^{-i\theta} \operatorname{ch} \tau\theta$ sont quatre solutions indépendantes de (3.6).

Pour $\tau \notin \{-i, 0, i\}$, on pose:

$$v_1(\tau) = (i\tau + 1)\left(\frac{\operatorname{sh} \tau\theta}{\tau} + \frac{\operatorname{ch} \tau\theta}{i}\right)e^{i\theta}$$

$$v_2(\tau) = \left(\frac{\operatorname{sh} \tau\theta}{\tau} - \frac{\operatorname{ch} \tau\theta}{i}\right)e^{i\theta}$$

$$v_3(\tau) = \left(\frac{\operatorname{sh} \tau\theta}{\tau} + \frac{\operatorname{ch} \tau\theta}{i}\right)e^{-i\theta}$$

$$v_4(\tau) = (i\tau + 1)\left(\frac{\operatorname{sh} \tau\theta}{\tau} - \frac{\operatorname{ch} \tau\theta}{i}\right)e^{-i\theta}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

On détermine u_j, q_j à partir de v_j à l'aide des formules (3.4), (3.5). Ainsi, pour $\tau \notin \{-i, 0, i\}$, les triplets $(u_j, v_j, q_j)(\tau)$ sont éléments de Ker $\mathscr{C}_\tau$.

On montre facilement que les $(u_j(\tau), v_j(\tau), q_j(\tau))$ admettent un prolongement analytique en $-i$ (resp. 0, i) qui est un élément de Ker $\mathscr{C}_{-i}$ (resp. Ker $\mathscr{C}_0$, Ker $\mathscr{C}_i$). D'autre part, la valeur du déterminant:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} (\tau) = 64$$

prouve que les $(u_j, v_j, q_j)(\tau)$ sont quatre éléments indépendants de Ker $\mathscr{C}_\tau$, donc une base.

On cherche naturellement (u_*, v_*, q_*) sous la forme

$$\sum_{j=1}^{4} a_j(u_j, v_j, q_j)(\tau) \quad (a_j \text{ scalaires}).$$

Donc on veut résoudre le système:

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} \sum a_j u_j(\tau, 0) &= u_0(0) \quad \text{noté } w_1 \\ \sum a_j u_j(\tau, \omega) &= u_0(\omega) \quad \text{noté } w_2 \\ \sum a_j v_j(\tau, 0) &= v_0(0) \quad \text{noté } w_3 \\ \sum a_j v_j(\tau, \omega) &= v_0(\omega) \quad \text{noté } w_4. \end{aligned}$$

C'est ici qu'apparaît la fonction F discriminante, définie en (1.7). En effet le déterminant de ce système est égal à $16F(\tau)$. Lorsque $F(\tau) \neq 0$, le système admet une solution unique (a_1, a_2, a_3, a_4). D'où un unique (u_*, v_*, q_*) de la forme

$$(3.8)\qquad \sum_{j=1}^{4} \frac{A_{j\tau}(l_1, l_2, l_3)}{16F(\tau)} (u_j, v_j, q_j)(\tau)$$

où les $A_{j\tau}(l_1, l_2, l_3)$ sont de la forme

$$(3.9)\qquad \sum_{k=1}^{4} \beta_{jk}(\tau) w_k,$$

obtenus par résolution d'un système de Cramer. Les β_{jk} sont analytiques et les w_k dépendent continuement de (l_1, l_2, l_3), via $\mathscr{R}_\tau$.

Nous avons démontré:

THEOREME 3.1. *Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des zéros de F (1.7). Pour tout $\tau \in \mathbf{C}\backslash\mathscr{F}$, S_τ admet un inverse, R_τ. L'application $\tau \to R_\tau$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$ et analytique sur $\mathbf{C}\backslash\mathscr{F}$ à valeurs dans tous les*

$$\mathscr{L}(H^m \times H^m \times H^{m+1}, (H^{m+2} \cap H_0^{\,1}) \times (H^{m+2} \cap H_0^{\,1}) \times H^{m+1})$$

pour m entier $\geqq -1$.

Nous explorons maintenant le cas où $F(\tau) = 0$.

L'examen de la matrice du système (3.7), montre qu'alors elle est de rang 3. Son noyau est de dimension 1. D'où:

LEMME 3.2. *Si* $F(\tau) = 0$, Ker S_τ *est de dimension* 1.

La résolubilité du système (3.7) équivaut à l'appartenance de (l_1, l_2, l_3) à Im S_τ. On peut écrire (3.7) sous forme vectorielle:

$$\sum_{j=1}^{4} a_j W_j = W.$$

Le système (W_1, W_2, W_3, W_4) est de rang 3. $A_{j\tau}$ est le déterminant de W et des W_k, à l'exception de W_j. A l'aide de ces informations, on voit que la compatibilité de (3.7) équivaut à l'annulation de tous les $A_{j\tau}$ (systèmes de rang 3). D'où:

LEMME 3.3. *Si* $F(\tau) = 0$, *les conditions* (1) *et* (2) *sont équivalentes:*

(1) $(l_1, l_2, l_3) \in \operatorname{Im} S_\tau$
(2) $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad A_{j\tau}(l_1, l_2, l_3) = 0$.

Ce lemme et (3.9) donnent que Im S_τ est fermée. On a donc une alternative de Fredholm. Un calcul simple permet de déterminer

$$\begin{aligned} &S_\tau^* : H_0^1 \times H_0^1 \times L^2 \rightarrow H^{-1} \times H^{-1} \times L^2 \\ &(v_1, v_2, v_3) \rightarrow (v_1'' + (i\tau + 1)^2 v_1 + (1 - i\tau)v_2' + (1 + i\tau)v_3; \\ &\qquad\qquad (\tau^2 + 1)v_2 - v_3'; (1 - i\tau)v_1 - v_2'). \end{aligned}$$

Comme pour S_τ, on montre

LEMME 3.4 (et notation). *Si* $F(\tau) = 0$, Ker S_τ^* *est de dimension* 1. *Soit donc* K_τ *un élément non nul de* Ker S_τ^*.

L'alternative de Fredholm donne:

LEMME 3.5.

$$\operatorname{Im} S_\tau = \{l \in H^{-1} \times H^{-1} \times L^2 / \langle l, K_\tau \rangle = 0\}$$

où

$$\langle l, v \rangle = \langle l_1, v_1 \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \langle l_2, v_2 \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \int_0^\omega l_3 v_3 d\theta.$$

Lorsque τ_0 est un zéro simple de F nous pouvons préciser Rés $R_{\tau|\tau=\tau_0}$. C'est une application continue,

$$L : H^{-1} \times H^{-1} \times L^2 \rightarrow H_0^1 \times H_0^1 \times L^2.$$

Pour $(l_1, l_2, l_3) \in H^{-1} \times H^{-1} \times L^2$,

$$L(l_1, l_2, l_3) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} (\tau - \tau_0) R_\tau(l_1, l_2, l_3).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

Exploitant (3.8) et le fait que $\mathscr{R}_\tau$ est analytique en τ_0, nous obtenons:

$$L(l_1, l_2, l_3) = -\lim_{\tau\to\tau_0} (\tau - \tau_0) \sum_{j=1}^{4} \frac{A_{j\tau}(l_1, l_2, l_3)}{16F(\tau)} (u_j, v_j, q_j)(\tau).$$

Comme τ_0 est zéro simple de F et que $A_{j\tau}$, u_j, v_j, et q_j sont analytiques:

$$L(l_1, l_2, l_3) = -\sum_{j=1}^{4} \frac{A_{j\tau_0}(l_1, l_2, l_3)}{16\, F'(\tau_0)} (u_j, v_j, q_j)(\tau_0).$$

C'est donc un élément de Ker $\mathscr{C}_{\tau_0}$. Comme $L(l_1, l_2, l_3) \in H_0{}^1 \times H_0{}^1 \times L^2$, c'est donc finalement un élément de Ker S_{τ_0}. D'où avec le Lemme 3.2:

LEMME 3.6. *Si τ est zéro simple de F, soit s_τ un élément non nul de* Ker $\mathscr{S}_\tau$. Rés $R_{\zeta|\zeta=\tau}$ *est de la forme $l \to \lambda(l)$. s_τ où λ est une forme continue sur $H^{-1} \times H^{-1} \times L^2$.*

Remarque. Une particularité importante de la fonction discriminante F est qu'elle s'annule en $-i$ et i, quelle que soit l'ouverture; à l'inverse de la fonction discriminante du biharmonique, qui est égale à $F(\tau)/(\tau^2 + 1)$. En effet, $-i$ est de multiplicité 2 pour F si: $F'(-i) = 0$. Or:

$$F'(-i) = 2i \sin \omega(\omega \cos \omega - \sin \omega),$$

s'annule pour $\omega = \omega_0$ où: ω_0 est l'unique solution dans $]0, 2\pi[$ de l'équation

(3.10) $\quad \omega = tg\omega.$

Il en est de même pour i.

Ker $S_i{}^*$ est engendré par $(0, 0, 1)$. Le Lemme 3.4 donne

(3.11) $$\operatorname{Im} S_i = \left\{ (l_1, l_2, l_3) \in H^{-1} \times H^{-1} \times L^2 \Big/ \int_0^\omega l_3 d\theta = 0 \right\}.$$

Ker S_{-i} est engendré par $(0, 0, 1)$. Le Lemme 3.6 permet de déduire:

LEMME 3.7. *Supposons $\omega \neq \omega_0$. Notons π_1 et π_2 la première et la deuxième projection de $H_0{}^1 \times H_0{}^1 \times L^2$ sur $H_0{}^1$. Nous avons que les applications $\tau \to \pi_1 \circ R_\tau$ et $\tau \to \pi_2 \circ R_\tau$ admettent un prolongement analytique en $-i$.*

Appliquons maintenant les résultats obtenus à la résolution de (2.12). Utilisant (3.3) et (3.8), nous avons, pour $\tau \in C_{\eta_0, \eta_\infty} \backslash \mathscr{F}$

(3.12) $$(u_\tau, v_\tau, q_\tau) = \mathscr{R}_\tau[(l_1, l_2, l_3)(\tau)] - \sum_{j=1}^{4} \frac{A_{j\tau}[(l_1, l_2, l_3)(\tau)]}{16F(\tau)} (u_j, v_j, q_j)(\tau).$$

(3.13) $\quad$ Notons $(u_\tau, v_\tau, q_\tau) = z_\tau$.

(3.13′) Rappelons que $(l_1, l_2, l_3)(\tau)$, que nous noterons aussi l_τ, provient de $\tilde{\mathscr{G}} \in E^m_{\eta_0, \eta_\infty}(B)$ par (2.9), et est analytique de C_{η_0, η_∞} *à* valeurs dans $H^m \times H^m \times H^{m+1}$ $(]0, \omega[)$ par (2.7). Le Théorème 3.1, les Lemmes 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5 et la formule (3.12) donnent:

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

THEOREME 3.8. a. *$\tau \to z_\tau$ est méromorphe de C_{η_0,η_∞} à valeurs dans*

$$(H^{m+2} \cap H_0{}^1) \times (H^{m+2} \cap H_0{}^1) \times H^{m+1}(]0, \omega[).$$

Ses pôles coïncident avec des zéros de F.

b. *Soit τ_0 un zéro de F de multiplicité d intérieur à C_{η_0,η_∞}.*

b1. *Si $\langle l_{\tau_0}, K_{\tau_0}\rangle \neq 0$, $\tau \to z_\tau$ admet un pôle d'ordre d en τ_0.*

b2. *Si $\langle l_{\tau_0}, K_{\tau_0}\rangle = 0$, $\tau \to z_\tau$ admet un pôle d'ordre $\leqq d - 1$ en τ_0.*

Ce théorème donne donc une CNS de prolongement analytique en τ_0 si τ_0 est un zéro simple de F (cas de loin le plus fréquent). F admettant, pour certaines ouvertures ω, 2 zéros doubles conjugués, il nous faut étudier le cas où $d = 2$ (il n'y a pas de zéros de multiplicité supérieure).

Nous nous plaçons dans le cas où $\langle l_{\tau_0}, K_{\tau_0}\rangle = 0$ i.e., $l_{\tau_0} \in \operatorname{Im} S_{\tau_0}$ et nous cherchons une CNS pour que z_τ admette un prolongement analytique en τ_0:

$$\lim_{\tau\to\tau_0} (\tau - \tau_0)z_\tau = 0.$$

Soit h un antécédent de l_{τ_0}. Nous avons:

$$\lim_{\tau\to\tau_0} (\tau - \tau_0)z_\tau = (\tau - \tau_0)^2 R_\tau f_\tau \tag{3.14}$$

où

$$f_\tau = \frac{l_\tau - l_{\tau_0}}{\tau - \tau_0} - \frac{S_\tau - S_{\tau_0}}{\tau - \tau_0}\, h.$$

f_τ admet un prolongement analytique en τ_0 :

$$f_{\tau_0} = \frac{dl}{d\tau}(\tau_0) - S_{\tau_0}{}' \cdot h. \tag{3.15}$$

($S_\tau{}'$ s'obtient en dérivant en τ tous les coefficients de S_τ.)

Du Théorème 3.8 nous déduisons l'équivalence

$$\lim_{\tau\to\tau_0} (\tau - \tau_0)^2 R_\tau f_\tau = 0 \Leftrightarrow \langle f_{\tau_0}, K_{\tau_0}\rangle = 0. \tag{3.16}$$

La condition:

$$\frac{dl}{d\tau}(\tau_0) - S_{\tau_0}{}' \cdot h \in \operatorname{Im} S_{\tau_0}$$

(cf (3.15) et (3.16)) est donc indépendante de l'antécédent h choisi pour l_{τ_0}. Donc: $\forall s \in \operatorname{Ker} S_{\tau_0}$, $S_{\tau_0}{}'s \in \operatorname{Im} S_{\tau_0}$. Cette condition est d'ailleurs spécifique des zéros doubles. On a une condition identique pour l'adjoint. D'où le lemme, qui fait suite au Lemme 3.4:

LEMME 3.9 (et notation). *Si τ est un zéro double de F, $S_\tau{}^{*\prime} K_\tau$ appartient à* $\operatorname{Im} S_\tau{}^*$. *Soit donc L_τ un antécédent de $S_\tau{}^{*\prime}K_\tau$: $S_\tau{}^*L_\tau = S_\tau{}^{*\prime}K_\tau$.*

A l'aide de L_{τ_0}, on peut donner une expression indépendante de h à la quantité $\langle S_{\tau_0}'h, K_{\tau_0}\rangle$. On a:

$$\langle S_{\tau_0}'h, K_{\tau_0}\rangle = \langle S_{\tau_0}^{*\prime}K_{\tau_0}, h\rangle = \langle S_{\tau_0}^{*}L_{\tau_0}, h\rangle = \langle S_{\tau_0}h, L_{\tau_0}\rangle.$$

D'où:

(3.17) $\langle S_{\tau_0}'h, K_{\tau_0}\rangle = \langle l_{\tau_0}, L_{\tau_0}\rangle.$

Le Théorème 3.8 et (3.14)–(3.17) donnent:

THEOREME 3.10. *Soit* τ_0 *un zéro double de* F, *intérieur à* C_{η_0,η_∞}. *Les conditions* (1) *et* (2) *sont équivalentes:*

(1) z_τ *admet un prolongement analytique en* τ_0

(2) $\langle l_{\tau_0}, K_{\tau_0}\rangle = 0$ *et* $\left\langle \frac{dl}{d\tau}(\tau_0), K_{\tau_0}\right\rangle - \langle l_{\tau_0}, L_{v_0}\rangle = 0.$

4. η-antécédents. Pour $\tilde{\mathscr{G}} \in E^m_{\eta_0,\eta_\infty}$ et $\eta \in [\eta_0, \eta_\infty]$ j'appellerai (4.1) *η-antécédent* de $\tilde{\mathscr{G}}$ tout $\tilde{\mathscr{U}} \in D^m_{\eta,\eta}(B)$ vérifiant $\tilde{\mathscr{S}}\tilde{\mathscr{U}} = \tilde{\mathscr{G}}$. C'est une notion naturelle car $\tilde{\mathscr{G}}$ appartient aussi à $E^m_{\eta,\eta}(B)$ qui contient $E^m_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$.

THEOREME 4.1. *Soit* $\eta \in [\eta_0, \eta_\infty]$. *Si* F *n'a pas de zéro de partie imaginaire* η, $\tilde{\mathscr{G}}$ *admet un unique* η*-antécédent, noté* $\tilde{\mathscr{U}}_n$.

Démonstration. La condition nécessaire (2.11) et le Théorème 3.1 (S_τ injectif pour tout τ de partie imaginaire η) donnent l'unicité. Le Théorème 3.8 donne l'existence de

$$(u_\tau, v_\tau, q_\tau) \in (H^{m+2} \cap H_0^1)^2 \times H^{m+1}(]0, \omega[)$$

pour tout τ de partie imaginaire η.

Notons $\tilde{u}_\eta$ la fonction : $B \rightarrow \mathbf{C}$

$$(\xi, \theta) \rightarrow u_{\xi+i\eta}(\theta).$$

De même $\tilde{v}_\eta$ et $\tilde{q}_\eta$. Il faut d'abord avoir:

(4.2) $\tilde{u}_\eta, \tilde{v}_\eta \in \mathscr{F}H^{m+2}(B), \quad \tilde{q}_\eta \in \mathscr{F}H^{m+1}(B).$

Fourier de $H^m(B)$, $\mathscr{F}H^m(B)$ est caractérisé par:

$$u \in \mathscr{F}H^m(B) \Leftrightarrow \int_{\mathbf{R}} \sum_{j+k=m} \int_0^\omega (1 + |\xi|^2)^j |D_\theta{}^k u|^2 d\theta d\xi < +\infty.$$

On obtient une majoration de

$$\int_{|\xi|\leqq\xi_0} \ldots d\xi$$

pour ξ_0 fixé, par la norme de R_τ dans $\mathscr{L}(H^m \times H^m \times H^{m+1}, H^{m+2} \times H^{m+2}$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

$\times H^{m+1})$ pour $\tau = \xi + i\eta$ avec $|\xi| \leqq \xi_0$. Pour le morceau restant

$$\int_{|\xi|>\xi_0} \ldots d\xi$$

pour ξ_0 assez grand, on opère comme dans l'appendice B de Kellogg et Osborn [**4**], en se basant sur les estimations [**1**] relatives à un ouvert B^* régulier: Si U^*, $V^* \in H_0^1(B^*)$ et $Q^* \in L^2(B^*)$:

$$\begin{aligned}\|(U^*, V^*, Q^*)\|_{H^{m+2}\times H^{m+2}\times H^{m+1}(B^*)} \\ \leqq C(\|\tilde{\mathscr{S}}(U^*, V^*, Q^*)\|_{H^m\times H^m\times H^{m+1}(B^*)} \\ + \|(U^*, V^*, Q^*)\|_{L^2\times L^2\times L^2(B^*)})\end{aligned}$$

(Théorème 10.5 dans [**1**] appliqué à $\tilde{\mathscr{S}}$ elliptique).

On obtient finalement une majoration:

$$(4.3)\quad \begin{aligned}\|\tilde{u}_\eta\|_{\mathscr{F}H^{m+2}} + \|\tilde{v}_\eta\|_{\mathscr{F}H^{m+2}} + \|\tilde{q}_\eta\|_{\mathscr{F}H^{m+1}} \\ \leqq C(\eta)(\|l_1\|_{\mathscr{F}H^m} + \|l_2\|_{\mathscr{F}H^m} + \|l_3\|_{\mathscr{F}H^{m+1}}).\end{aligned}$$

Nous pouvons poser:

$$\tilde{\mathscr{U}}_\eta = e^{-\eta t}\bar{\bar{\mathscr{F}}}(\tilde{u}_\eta, \tilde{v}_\eta, \tilde{q}_\eta).$$

On a:

$$\bar{\bar{\mathscr{F}}}(\tilde{u}_\eta, \tilde{v}_\eta, \tilde{q}_\eta) \in (H^{m+2} \cap H_0^1)^2 \times H^{m+1}(B)$$

par (4.2) donc $\tilde{\mathscr{U}}_\eta \in D^m_{\eta,\eta}(B)$. Enfin, par construction, $\tilde{\mathscr{S}}\tilde{\mathscr{U}}_\eta = \tilde{\mathscr{G}}$.

Il est très intéressant de comparer pour $\eta_1 \neq \eta_2$ $\tilde{\mathscr{U}}_{\eta_1}$ et $\tilde{\mathscr{U}}_{\eta_2}$. En effet, s'ils sont égaux, ils appartiennent alors à $D^m_{\eta_1,\eta_2}(B)$.

(4.4) On voit ainsi qu'une CNS pour que $\tilde{\mathscr{G}}$ ait un antécédent dans $D^m_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$ est que $\tilde{\mathscr{U}}_{\eta_0}$ et $\tilde{\mathscr{U}}_{\eta_\infty}$ existent et qu'ils soient égaux.

THEOREME 4.2. *Soit $\eta_1, \eta_2 \in [\eta_0, \eta_\infty]$ avec $\eta_1 < \eta_2$. On suppose que F n'a pas de zéro de partie imaginaire η_1 ou η_2. Alors:*

$$\tilde{\mathscr{U}}_{\eta_1}(t, \cdot) - \tilde{\mathscr{U}}_{\eta_2}(t, \cdot) = i\sqrt{2\pi} \sum_{\tau_0 \in \mathscr{F} \cap C_{\eta_1,\eta_2}} \text{Rés } (e^{it\tau} z_\tau)_{|\tau=\tau_0}$$

où z_τ désigne (u_τ, v_τ, q_τ) conformément à (3.13).

La démonstration est assez classique. Disons seulement que la majoration (4.3) et le fait que $\tau \to R_\tau$ soit continue sur un voisinage des droites $\mathbf{R} + i\eta_1$ et $\mathbf{R} + i\eta_2$ interviennent de façon essentielle. Le principe de la démonstration est une intégration de la fonction méromorphe $\tau \to e^{it\tau}z_\tau$ sur un rectangle avec calcul classique des résidus, puis passage à la limite sur le "contour" infini constitué par les droites $\mathbf{R} + i\eta_1$ et $\mathbf{R} + i\eta_2$.

On cherche maintenant à connaître la forme des résidus.

THEOREME 4.3. *Soit τ_0 un zéro de F intérieur à C_{η_0,η_∞}. Soit d son ordre de multiplicité. Notons par*

$$s : \lim_{\tau\to\tau_0} (\tau - \tau_0)^d z_\tau$$

et si $d = 2$, notons par

$$\sigma : \lim_{\tau\to\tau_0} (\tau - \tau_0)\left(z_\tau - \frac{s}{(\tau - \tau_0)^2}\right).$$

On a:

1) $\text{Rés}\ (e^{it\tau}z_\tau)_{|\tau=\tau_0} = \begin{cases} e^{it\tau_0}s & si\ d = 1 \\ e^{it\tau_0}(\sigma + its) & si\ d = 2. \end{cases}$

2) $S_{\tau_0}s = 0$ *et de plus si $d = 2$: $S_{\tau_0}\sigma = -S_{\tau_0}'s$.*

3) $\tilde{\mathscr{F}}\ [\text{Rés}\ e^{it\tau}z_{\tau_{|\tau=\tau_0}}] = 0$.

Preuve. 1) Immédiat grâce au développement de Laurent de z_τ en τ_0 dans $H_0^1 \times H_0^1 \times L^2$.

2) $S_{\tau_0}s = \lim_{\tau\to\tau_0} (\tau - \tau_0)^d[l_\tau - (S_\tau - S_{\tau_0})z_\tau]$.

Posons

$$T_\tau = \frac{S_\tau - S_{\tau_0}}{\tau - \tau_0}.$$

T_τ est analytique. D'autre part, l_τ est analytique. On a:

$$S_{\tau_0}s = \lim_{\tau\to\tau_0} (\tau - \tau_0)^{d+1}T_\tau z_\tau$$

qui est nul car le pôle est d'ordre $\leqq d$. Si $d = 2$,

$$S_{\tau_0}\sigma = \lim_{\tau\to\tau_0} (\tau - \tau_0)S_{\tau_0}z_\tau$$

car $S_{\tau_0}s = 0$. En raisonnant comme ci-dessus on obtient:

$$S_{\tau_0}\sigma = -\lim_{\tau\to\tau_0} (\tau - \tau_0)^2 T_\tau z_\tau.$$

Or

$$z_\tau = \frac{s}{(\tau - \tau_0)^2} + \frac{x_\tau}{\tau - \tau_0}$$

où x_τ est analytique en τ_0.
D'où

$$S_{\tau_0}\sigma = -\lim_{\tau\to\tau_0} T_\tau s.$$

C'est égal à $-T_{\tau_0}s$ et comme $T_{\tau_0} = S_{\tau_0}'$, on a ce qu'on veut.

3) Découle du 2) en remarquant que $\tilde{\mathscr{F}}[\text{Rés}] = 0$ équivaut à:

$$e^{it\tau_0}S_{\tau_0}s = 0 \quad \text{si } d = 1$$
$$e^{it\tau_0}S_{\tau_0}\sigma + ite^{it\tau_0}S_{\tau_0}s + e^{it\tau_0}S_{\tau_0}'s = 0 \quad \text{si } d = 2.$$

5. Résultats. Nous allons être en mesure de dégager une CNS pour que $\tilde{\mathscr{G}}$ ait un antécédent dans $D^m_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$. Par (2.7), il apparaît qu'une condition nécessaire est que u_τ, v_τ et q_τ soient analytiques sur C_{η_0,η_∞}. (4.4) et le Théorème 4.2 montrent que cette condition est suffisante. D'après les Théorèmes 3.8 et 3.10, il nous faut transcrire par rapport au second membre

$$\mathscr{G} = (f_1, f_2, g) \in E^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$$

les conditions:

$$(5.1) \qquad \langle l_{\tau_0}, K_{\tau_0}\rangle = 0$$

$$(5.2) \qquad \left\langle \frac{dl}{d\tau}(\tau_0), K_{\tau_0}\right\rangle - \langle l_{\tau_0}, L_{\tau_0}\rangle = 0.$$

En récapitulant les différentes transformations effectuées pour passer de $\mathscr{G}$ à l_{τ_0}, on obtient facilement que:

(5.1) équivaut à $\Phi_{\tau_0}(\mathscr{G}) = 0$ où

$$(5.3) \qquad \Phi_{\tau_0}(f_1, f_2, g) = \int_\Omega r^{-i\tau_0}\left[f_1\phi_1(\theta) + f_2\phi_2(\theta) + \frac{1}{r}g\phi_3(\theta)\right]dxdy$$

avec (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) obtenu à partir de $K_{\tau_0} = (k_1, k_2, k_3)$ par:

$$(5.4) \qquad \begin{aligned} \phi_1 &= -k_1\cos\theta - k_2\sin\theta \\ \phi_2 &= -k_1\sin\theta + k_2\cos\theta \\ \phi_3 &= 2k_1 - k_2' + k_3. \end{aligned}$$

Comme τ_0 est intérieur à C_{η_0,η_∞}, Φ_{τ_0} est une forme linéaire continue sur $E^m_{\theta_0,\theta_\infty}(\Omega)$

Cas particulier: $\tau_0 = i$; conformément à (3.11), on a:

$$\Phi_i(f_1, f_2, g) = \int_\Omega g dxdy.$$

On retrouve la condition de résolution du problème variationnel sur un borné. On trouve de même que (5.2) équivaut à: $\Psi_{\tau_0}(\mathscr{G}) = 0$ où

$$(5.5) \qquad \begin{aligned} \psi_{\tau_0}(f_1, f_2, g) = i\int_\Omega r^{-i\tau_0} \operatorname{Log} r\left[f_1\phi_1(\theta) + f_2\phi_2(\theta) + \frac{1}{r}g\phi_3(\theta)\right]dxdy \\ + \int_\Omega r^{-i\tau_0}\left[f_1\psi_1(\theta) + f_2\psi_2(\theta) + \frac{1}{r}g\psi_3(\theta)\right]dxdy \end{aligned}$$

avec (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) donné par (5.4) et (ψ_1, ψ_2, ψ_3) obtenu à partir de L_{τ_0} par les mêmes formules que (5.4). Ces triplets sont C^∞ en θ et appartiennent à $H_0^1 \times H_0^1 \times L^2(]0, \omega[)$. Comme τ_0 est intérieur à C_{η_0,η_∞}, Ψ_{τ_0} est une forme linéaire continue sur $E^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$.

THEOREME 5.1. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *F n'a pas de zéro de partie imaginaire η_0 ou η_∞.*

(2) *L'image de $\mathscr{S}^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}$ est fermée. Dans ces conditions $\mathscr{S}^m_{\theta_0,\theta_\infty}$ est à indice et son indice vaut:*

$$-\operatorname{card}(\mathscr{F} \cap C_{\eta_0,\eta_\infty}) - \operatorname{card}(\mathscr{F}' \cap C_{\eta_0,\eta_\infty}) = -\operatorname{codim} \mathscr{S}^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}$$

(en effet $\mathscr{S}^m_{\theta_0,\theta_\infty}$ est toujours injectif) avec: $\mathscr{F}$ l'ensemble des zéros de F et $\mathscr{F}'$ l'ensemble des zéros doubles de F.

Preuve. Le sens (1) $\Rightarrow$ (2) provient de tout ce qui précède. Nous avons:

$$\operatorname{Im} \mathscr{S}^m_{\gamma_0,\gamma_\infty} = \left(\bigcap_{\tau \in \mathscr{F} \cap C_{\eta_0,\eta_\infty}} \operatorname{Ker} \Phi_\tau \right) \cap \left(\bigcap_{\tau \in \mathscr{F}' \cap C_{\eta_0,\eta_\infty}} \operatorname{Ker} \Psi_\tau \right).$$

L'injectivité provient de l'unicité des η-antécédents (Théorème 4.1). La formule de l'indice découle du fait que les Φ_τ pour $\tau \in \mathscr{F} \cap C_{\eta_0,\eta_\infty}$ et les Ψ_τ pour $\tau \in \mathscr{F}' \cap C_{\eta_0,\eta_\infty}$ sont indépendantes. Pour le sens (2) $\Rightarrow$ (1), on suppose que (1) n'est pas vérifié, par exemple que F a un zéro de partie imaginaire η_0, soit τ_0. On montre, ce qui est équivalent, que $\operatorname{Im} \tilde{\mathscr{S}}^m_{\eta_0,\eta_\infty}$ n'est pas fermée. Pour cela on construit une suite $\tilde{\mathscr{U}}_n$ de $D^m_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$ telle que: la suite $\tilde{\mathscr{S}}\tilde{\mathscr{U}}_n$ converge pour la topologie de $E^m_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$ vers un élément $\tilde{\mathscr{G}}$ qui, lui, n'appartient pas à l'image de $\tilde{\mathscr{S}}^m_{\eta_0,\eta_\infty}$.

Soit pour cela:

s un élément non nul de $\operatorname{Ker} S_{\tau_0}$.

ϕ une fonction de troncature sur $\mathbf{R}$, qui vaut 1 sur $]-\infty, 0]$ et 0 sur $[1, +\infty[$.

On définit pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\tilde{\mathscr{U}}_n = \phi(t) e^{(i\tau_0 + 1/n)t} s(\theta).$$

La valeur de $\tilde{\mathscr{G}}$ est : $\tilde{\mathscr{S}}(\phi(t)e^{it\tau_0}s(\theta))$ qui n'a pas de η_0-antécédent.

Une application immédiate de ce théorème est:

(5.6) COROLLAIRE. *Si $\mathscr{F} \cap C_{\eta_0,\eta_\infty}$ est vide, $\mathscr{S}^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}$ est un isomorphisme.*

F n'a pas de zéro réel. Donc, pour $\eta_0 = \eta_\infty = 0$:

(5.7) $\quad \forall m \in \mathbf{N}, \mathscr{S}^m_{m+1,m+1}$ est un isomorphisme.

Plus généralement, on est dans la situation de (5.6) si

(5.8) $\quad \eta_0 > -1$ et $\eta_\infty < 1$ lorsque $\omega < \pi$

(5.9) $\quad \eta_0 \geqq -\omega_0'/\omega$ et $\eta_\infty \leqq \omega_0'/\omega$ lorsque $\omega > \pi$

où ω_0' est l'unique solution de l'équation

$$\frac{\sin \omega}{\omega} = -\cos \omega_0,$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

avec ω_0 donné par (3.10).

$$\omega_0 \simeq 1.43030\ \pi$$
$$\omega_0' \simeq 0.812825\ \pi.$$

L'étude faite au § 3 montre que l'opérateur S_τ possède une bonne régularité: si $S_\tau(u, v, q) \in H^m \times H^m \times H^{m+1}(]0, \omega[)$, alors

$$(u, v, q) \in H^{m+2} \times H^{m+2} \times H^{m+1}\ (]0, \omega[).$$

De là on déduit:

THEOREME 5.2. *Supposons que F n'a pas de zéro de partie imaginaire η_0 ou η_∞. Si $\mathscr{U} \in D^{-1}_{\eta_0,\eta_\infty}(\Omega)$ est tel que $\mathscr{S}\mathscr{U} \in E^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$, alors $\mathscr{U} \in D^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$.*

Nous allons maintenant voir ce qui se passe quand $\mathscr{G}$ est donné quelconque dans $E^m_{\theta_0,\theta_\infty}(\Omega)$.

(5.10) Pour $\tau \in \mathscr{F}$, soit s_τ un élément non nul de Ker S_τ.

(5.11) Pour $\tau \in \mathscr{F}'$, soit σ_τ un élément de $H_0^1 \times H_0^1 \times L^2(]0, \omega[)$ vérifiant:

$$S_\tau\sigma_\tau = -S_\tau' s_\tau.$$

(5.12) Soit $Y_\tau = \chi_D^{-1}(e^{it\tau}s_\tau)$.

(5.13) $Z_\tau = \chi_D^{-1}(e^{it\tau}[\sigma_\tau + its_\tau])$.

Nous pouvons énoncer:

THEOREME 5.3. *Supposons que F n'a pas de zéro de partie imaginaire η_0 ou η_∞. Soit $\mathscr{G} \in E^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$.*

1) $\mathscr{G}$ admet dans $D^m_{\gamma_0,\gamma_0}(\Omega)$ un unique antécédent $\mathscr{U}_0$, et dans $D^m_{\gamma_\infty,\gamma_\infty}(\Omega)$ un unique antécédent $\mathscr{U}_\infty$.

2) Il existe des constantes λ_τ pour $\tau \in \mathscr{F} \cap C_{\eta_0,\eta_\infty}$ et μ_τ pour $\tau \in \mathscr{F}' \cap C_{\eta_0,\eta_\infty}$ telles que:

$$\mathscr{U}_0 - \mathscr{U}_\infty = \sum_{\tau\in\mathscr{F}\cap C_{\eta_0,\eta_\infty}} \lambda_\tau Y_\tau + \sum_{\tau\in\mathscr{F}'\cap C_{\eta_0,\eta_\infty}} \mu_\tau Z_\tau.$$

Y_τ est donné par (5.12) et Z_τ par (5.13).

3) Pour $\tau \in \mathscr{F}$, Y_τ est de la forme:

$$(r^{i\tau}y_1(\theta), r^{i\tau}y_2(\theta), r^{i\tau-1}y_3(\theta)).$$

Pour $\tau \in \mathscr{F}'$, Z_τ est de la forme:

$$(r^{i\tau}[z_1 + iy_1 \operatorname{Log} r], r^{i\tau}[z_2 + iy_2 \operatorname{Log} r], r^{i\tau-1}[z_3 + iy_3 \operatorname{Log} r]).$$

Les y_j et z_j sont des fonctions C^∞ en θ dont l'expression dépend de τ. Les Y_τ et Z_τ annulent $\mathscr{S}$ et n'appartiennent pas à $D^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$ (mais $D^m_{\gamma_\infty,\gamma_0}(\Omega)$).

Preuve. Le 1) provient du Théorème 4.1. Le 2) sera démontré par application du Théorème 4.2 pour $\eta_1 = \eta_0$ et $\eta_2 = \eta_\infty$ (on applique

χ_D^{-1} à l'égalité du Théorème 4.2) si l'on montre: pour τ_0 zéro simple de F:

(5.14) $\quad$ $\text{Rés}\; e^{it\tau} z_{\tau|\tau=\tau_0} = \lambda_{\tau 0} e^{it\tau_0} s_{\tau_0}$

pour τ_0 zéro double de F:

$$\text{Rés}\; e^{it\tau} z_{\tau|\tau=\tau_0} = e^{it\tau_0}[\lambda_{\tau_0} s_{\tau_0} + \mu_{\tau_0}(\sigma_{\tau_0} + its_{\tau_0})].$$

Pour cela on applique le Théorème 4.3 en utilisant les notations (5.10) et (5.11): Si $d = 1$, comme dim Ker $S_{\tau_0} = 1, \exists\ \lambda_{\tau_0}$ tel que

$$s = \lambda_{\tau_0} s_{\tau_0}.$$

D'où (5.14). Si $d = 2$, il existe de même μ_{τ_0} tel que $s = \mu_{\tau_0} s_{\tau_0}$; comme $S_{\tau_0}\sigma = -S_{\tau_0}'s\ \exists\ \lambda_{\tau_0}$ tel que

$$\sigma = \mu_{\tau_0}\sigma_{\tau_0} + \lambda_{\tau_0} s_{\tau_0}.$$

D'où (5.15).

Le 3) provient de la définition de χ_D^{-1}: si on note $s_\tau = (s_1, s_2, s_3)$:

$$y_1 = s_1 \cos\theta - s_2 \sin\theta$$
$$y_2 = s_1 \sin\theta + s_2 \cos\theta$$
$$y_3 = s_3.$$

Et (z_1, z_2, z_3) est obtenu de la même manière à partir de σ_τ.

Remarque. Un choix judicieux de s_τ, et éventuellement de σ_τ, permet d'obtenir:

si τ zéro simple: $\lambda_\tau = \Phi_\tau(\mathscr{G})$

si τ zéro double: $\mu_\tau = \Phi_\tau(\mathscr{G})$ et $\lambda_\tau = a_\tau \Psi_\tau(\mathscr{G})$ où a_τ est une constante qui ne dépend pas de $\mathscr{G}$.

6. Cas du pôle $\tau = -i$. Comme $s_{-i} = (0, 0, 1)$, $Y_{-i} = (0, 0, 1)$. Lorsque $-i$ est zéro simple de F, i.e., quand $\omega \neq \omega_0$ (3.10), la seule singularité associée à $-i$ est ainsi polynômiale en x et y. On est donc en présence d'un pôle τ "régulier" au sens de [**5**], p. 239. C'est d'ailleurs le seul cas de pôle régulier qui se présente: les Z_τ ne sont jamais polynômiaux; et pour qu'un Y_τ le soit, il faut que τ soit de la forme $-i\alpha$ avec α entier naturel. Or F n'admet que $-i$ comme zéro de cette forme.

THEOREME 6.1. *Supposons que:*

a) $\omega \neq \omega_0$

b) $\eta_0 \neq \eta_\infty$

c) *le seul zéro de F dans la bande (fermée) C_{η_0,η_∞} est $-i$.*

Soit $\mathscr{G} \in E^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)$. Soit $\eta_1 \neq -1$, compris entre η_0 et η_∞. $\theta_1 = \eta_1 + m + 1$. Soit $\mathscr{U} = (w_1, w_2, p)$ l'unique antécédent de $\mathscr{G}$ dans $D^m_{\theta_1,\theta_1}(\Omega)$. Alors il *existe C constante indépendante de $\mathscr{G}$ telle que:*

$$\|w_1\|_{H^{m+2}_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)} + \|w_2\|_{H^{m+2}_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)} + \|D_x p\|_{H^{m}_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)} + \|D_y p\|_{H^{m}_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)} \leqq C\|\mathscr{G}\|_{E^{m}_{\gamma_0,\gamma_\infty}(\Omega)}.$$

Remarque. Ce théorème généralise (5.6). On perd seulement $\|p\|_{L^2_{\eta_0,\eta_\infty}(\Omega)}$.

Preuve. Lorsque, ni η_0, ni η_∞, n'est égal à -1, c'est une simple application du Théorème 5.3: $\mathscr{U}_0 - \mathscr{U}_\infty = (0, 0, \lambda_{-i})$ et $\mathscr{U}_1$ égale $\mathscr{U}_0$ ou $\mathscr{U}_\infty$. Lorsque, par exemple, $\eta_0 = -1$, en utilisant le Lemme 3.7, on définit $\tilde{u}_{-1}$ sur B par

$$\tilde{u}_{-1}(\xi, \theta) = u_{\xi - i}(\theta),$$

et de même $\tilde{v}_{-1}$. On montre de même que pour le Théorème 4.1 que $U_{-1} = e^t\mathscr{F}\tilde{u}_{-1}$ appartient à $H^{m+2}_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$, ainsi que V_{-1}. De même que dans le Théorème 4.2, comme F ne s'annule pas à l'intérieur de C_{η_0,η_∞}, on obtient $U_{-1} = U$ et $V_{-1} = V$ où U et V sont les deux premières composantes de $\tilde{\mathscr{U}}_\infty$. Donc $U, V \in H^{m+2}_{\eta_0,\eta_\infty}(B)$.

Avec les relations:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_1 &= U\cos\theta - V\sin\theta \\
\tilde{w}_2 &= U\sin\theta + V\cos\theta \\
D_x p &= f_1 + \Delta w_1 \\
D_y p &= f_2 + \Delta w_2,
\end{aligned}$$

on arrive à la conclusion du théorème.

7. Introduction du problème sur le polygone. Ω désigne dans toute la suite un polygone connexe. Ses sommets sont notés $A_1, \ldots, A_N$. Pour chaque j dans $\{1, \ldots, N\}$, Ω coincide au voisinage du sommet A_j avec un secteur Ω_j. Soit ω_j l'ouverture de Ω_j.

On peut toujours supposer les sommets de Ω suffisamment éloignés pour que, pour tout j, $D(A_j, 4)$ ne contienne pas d'autre sommet de Ω que A_j.

ϕ_j désigne une fonction de troncature C^∞ telle que:

$$\begin{aligned}
&\phi_j \equiv 1 \text{ sur } D(A_j, 1) \\
&\phi_j \equiv 0 \text{ en dehors de } D(A_j, 2).
\end{aligned}$$

On complète l'ensemble $\phi_1, \ldots, \phi_N$ par une fonction ϕ_0 de façon à obtenir une partition de l'unité sur Ω.

Il existe un ouvert régulier Ω_0, contenu dans Ω, qui contient le support de ϕ_0 et qui est distant d'au moins $\frac{1}{2}$ de chaque sommet A_j.

Voici les espaces à poids que nous utiliserons: pour le poids $(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$

$\in \mathbf{R}^N$, noté $\boldsymbol{\gamma}$, et m entier positif:

(7.1) $\quad \Pi^m_{\boldsymbol{\gamma}} = \{u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)/\phi_j u \in H^m_{\gamma_j,\gamma_j}(\Omega_j), j = 1, \ldots, N; \phi_0 u \in H^m(\Omega_0)\}.$

Avec le produit scalaire qui s'impose, $\Pi^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ est un Hilbert. $u \in \Pi^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega)$ signifie que $u \in H^m_{\text{loc}}(\Omega)$ et que, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$ et $|\alpha| \leqq m$,

$$r_j^{\gamma_j - m + |\alpha|} D^\alpha(\phi_j u) \in L^2(\Omega)$$

(r_j désignant la distance à A_j).

Nous utiliserons les notations suivantes pour les poids: $\boldsymbol{\gamma} \leqq \boldsymbol{\gamma}'$ signifie: $\forall j \in \{1, \ldots, N\}$ $\gamma_j \leqq \gamma_j'$. sup $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}') = \boldsymbol{\gamma}''$ signifie $\forall j \in \{1, \ldots, N\}$ $\gamma_j'' = \sup(\gamma_j, \gamma_j')$. Si $\beta \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{\beta}$ est l'élément $(\beta, \ldots, \beta)$ de $\mathbf{R}^N$.

Voici deux propriétés évidentes des $\Pi^m_{\boldsymbol{\gamma}}$: si $\boldsymbol{\gamma} \leqq \boldsymbol{\gamma}'$, $\Pi^m_{\boldsymbol{\gamma}} \hookrightarrow \Pi^m_{\boldsymbol{\gamma}'}$, les dérivations envoient $\Pi^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ dans $\Pi^{m-1}_{\boldsymbol{\gamma}}$.

Aussi, à partir des espaces $\Pi^k_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega)$, on définit les espaces $D^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega)$ et $E^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega)$ de la même façon que les $D^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}$ et les $E^m_{\gamma_0,\gamma_\infty}$ à partir des $H^k_{\gamma_0,\gamma_\infty}$: cf. (1.4) et (1.5).

Notons $\mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ l'opérateur de Stokes avec données nulles aux bords qui envoie $D^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega)$ dans $E^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega)$. Notre objet est l'étude des opérateurs $\mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$.

De façon analogue au secteur, les résultats dépendront:

i) des valeurs caractéristiques des espaces:

(7.2) $\quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{m} + \mathbf{1})$ cf. (1.6)

ii) des zéros des fonctions discriminantes (1.7) associées aux ouvertures ω_j:

$$F_j(\tau) = \frac{\operatorname{sh}^2 \tau\omega_j - \tau^2 \sin^2 \omega_j}{\tau^2}.$$

On notera: $\mathscr{F}_j$ l'ensemble des zéros de F_j; $\mathscr{F}_j'$ l'ensemble des zéros doubles. Pour $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\eta}' \in \mathbf{R}^N$:

(7.3) $\quad \mathscr{F}_j(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') = \mathscr{F}_j \cap C_{\eta_j,\eta_j'}; \quad \mathscr{F}_j'(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') = \mathscr{F}_j' \cap C_{\eta_j,\eta_j'}$

où, comme d'habitude,

$$C_{\eta_j,\eta_j'} = \{\tau \in \mathbf{C}/\operatorname{Im} \tau \in [\eta_j, \eta_j']\}.$$

Les singularités apparaissant sur les secteurs Ω_j vont intervenir. C'est pourquoi on note:

(7.4) pour $\tau \in \mathscr{F}_j$, $Y_{j\tau}$ est la singularité (5.12) relative au secteur Ω_j.

(7.5) pour $\tau \in \mathscr{F}_j'$, $Z_{j\tau}$ est la singularité (5.13) relative au secteur Ω_j.

Comme nous sommes dans le cas borné, c'est le comportement au voisinage de A_j des $Y_{j\tau}$ et $Z_{j\tau}$ qui importe. D'où les troncatures:

(7.6) $\quad \begin{aligned} U_{j\tau} &= \phi_j Y_{j\tau} \quad \text{pour } \tau \in \mathscr{F}_j \\ V_{j\tau} &= \phi_j Z_{j\tau} \quad \text{pour } \tau \in \mathscr{F}_j'. \end{aligned}$

La singularité à l'infini étant ainsi court-circuitée, on a:

LEMME 7.1. *Soit* $\tau \in \mathscr{F}_j$, *resp.* $\tau \in \mathscr{F}_j'$. *Pour* $m \in \mathbf{N}$ *et* $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^N$ *tels que* $\gamma_j - (m + 1) > \operatorname{Im} \tau$ *on a:*

$$U_{j\tau} \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega), \text{ resp. } V_{j\tau} \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega).$$

Par contre, comme $U_{j\tau}$ est "en $r_j^{i\tau}$" et $V_{j\tau}$ est "en $r_j^{i\tau} \operatorname{Log} r_j$" (cf. Théorème 5.3), on a:

LEMME 7.2. *Si une somme*:

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{\substack{\tau \in \mathscr{F}_j \\ \operatorname{Im}\tau > \eta_j}} \lambda_{j\tau} U_{j\tau} + \sum_{\substack{\tau \in \mathscr{F}_j' \\ \operatorname{Im}\tau > \eta_j}} \mu_{j\tau} V_{j\tau} \right)$$

appartient à $D^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega)$, *alors tous les coefficients* $\lambda_{j\tau}$ *et* $\mu_{j\tau}$ *sont nuls.*

D'autre part, comme $\mathscr{S} Y_{j\tau} = 0$ et $\mathscr{S} Z_{j\tau} = 0$, on a:

LEMME 7.3. *Soit* $\tau \in \mathscr{F}_j$, *resp.* $\tau \in \mathscr{F}_j'$. *Pour tout* $m \in \mathbf{N}$ *et tout* $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^N$, *on a:*

$$\mathscr{S} U_{j\tau} \in E^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega), \text{ resp. } \mathscr{S} V_{j\tau} \in E^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega).$$

8. Théorèmes généraux. Dans le cas du secteur, l'hypothèse "F n'a pas de zéro de partie imaginaire η_0 ou η_∞" jouait un rôle fondamental (Théorèmes 5.1, 5.2, 5.3). C'est pourquoi nous sommes amenés à formuler:

Définition 8.1. Pour m entier et $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbf{R}^N$, l'hypothèse $\mathscr{H}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ est définie par: $\forall j \in \{1, \ldots, N\}$, F_j n'a pas de zéro de partie imaginaire η_j (7.2).

THEOREME 8.2. (décomposition en parties régulière et singulière). *Soit* $m \in \mathbf{N}$; $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}' \in \mathbf{R}^N$ *tels que:*

$$\boldsymbol{\gamma} \leqq \boldsymbol{\gamma}' \text{ et } \mathscr{H}^m_{\boldsymbol{\gamma}}, \mathscr{H}^m_{\boldsymbol{\gamma}'}, \text{ soient vérifiées.}$$

Si $\mathscr{U} \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}'}(\Omega)$ *est tel que* $\mathscr{S}\mathscr{U} \in E^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega)$ *alors* $\mathscr{U}$ *se décompose de manière unique en:*

$$(8.1) \qquad \mathscr{U}_0 + \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{\tau \in \mathscr{F}_j(\mathbf{n}, \mathbf{n}')} \lambda_{j\tau} U_{j\tau} + \sum_{\tau \in \mathscr{F}_j(\mathbf{n}, \mathbf{n}')} \mu_{j\tau} V_{j\tau} \right)$$

où $\mathscr{U}_0 \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega)$ *et vérifie les estimations:*

$$(8.2) \qquad \|\mathscr{U}_0\|_{D^m_{\boldsymbol{\gamma}}} \leqq C(\|\mathscr{S}\mathscr{U}\|_{E^m_{\boldsymbol{\gamma}}} + \|\mathscr{U}\|_{D^m_{\boldsymbol{\gamma}'}}).$$

Preuve. Pour chaque j dans $\{1, \ldots, N\}$ la troncature par ϕ_j nous ramène au cas du secteur Ω_j pour les poids γ_j en 0 et γ_j' en ∞. $\mathscr{S}(\phi_j \mathscr{U}) \in E^m_{\gamma_j, \gamma_j'}(\Omega)$ avec la majoration:

$$(8.3) \qquad \|\mathscr{S}(\phi_j \mathscr{U})\|_{E^m_{\gamma_j, \gamma_j'}} \leqq C(\|\mathscr{S}\mathscr{U}\|_{E^m_{\boldsymbol{\gamma}}} + \|\mathscr{U}\|_{H^{m+2} \times H^{m+2} \times H^{m+1}(\Omega_0)}).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

L'application du Théorème 5.3 (parties 1) et 2)) pour le second membre $\mathcal{S}(\phi_j\mathcal{U})$ et pour chaque j permet de construire $\mathcal{U}_0$ vérifiant (8.1) et (8.2).

Remarque. A l'aide des inégalités (8.3), on montre que l'on a mieux que (8.2): $\mathcal{U}_0$ vérifie les majorations:

$$\|\mathcal{U}_0\|_{D_\gamma{}^m} \leqq C(\|\mathcal{S}\mathcal{U}\|_{E_\gamma{}^m} + \|\mathcal{U}\|_{H^{m+2}\times H^{m+2}\times H^{m+1}(\Omega_0)}). \tag{8.4}$$

THEOREME 8.3 (Image fermée). *Les conditions suivantes sont équivalentes*:
(1) $\mathcal{H}^m_\gamma$ *est vérifiée.*
(2) $\mathcal{S}^m_\gamma$ *est à image fermée.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2). Si $\mathcal{U} \in D^m_\gamma$, on a, avec les notations du Théorème 8.2: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$. $\mathcal{U}$ vérifie donc les estimations améliorées (8.4):

$$\|\mathcal{U}\|_{D_\gamma{}^m} \leqq C(\|\mathcal{S}\mathcal{U}\|_{E_\gamma{}^m} + \|\mathcal{U}\|_{H^{m+2}\times H^{m+2}\times H^{m+1}(\Omega_0)}).$$

Les estimations de [**1**] relatives à l'ouvert régulier Ω_0 permettent d'en déduire les estimations a priori:

$$\|\mathcal{U}\|_{D_\gamma{}^m} \leqq C(\|\mathcal{S}\mathcal{U}\|_{E_\gamma{}^m} + \|\mathcal{U}\|_{D_\gamma{}^{-1}}).$$

Comme on montre que pour tout entier m positif, l'injection de D^m_γ dans D^{-1}_γ est compacte, on est ainsi dans les conditions du lemme de Peetre, d'où l'on déduit que $\mathcal{S}^m_\gamma$ est à image fermée (de plus, son noyau est de dimension finie).

(2) $\Rightarrow$ (1). On suppose que $\mathcal{H}^m_\gamma$ n'est pas vérifiée. Il existe donc j et τ tels que $F_j(\tau) = 0$ et $\operatorname{Im}\tau = \eta_j$.

En considérant la suite $\mathcal{U}_n = r_j^{1/n}U_{j\tau}$, on voit qu'il n'existe pas de constante C indépendante de n telle que

$$\|\mathcal{U}_n\|_{D_\gamma{}^m} \leqq C(\|\mathcal{S}\mathcal{U}_n\|_{E_\gamma{}^m} + \|\mathcal{U}_n\|_{D_\gamma{}^{-1}}).$$

D'après le lemme de Peetre, on déduit que l'image de $\mathcal{S}^m_\gamma$ n'est pas fermée, ou le noyau de $\mathcal{S}^m_\gamma$ n'est pas de dimension finie.

Or Ker $\mathcal{S}^m_\gamma$ est de dimension finie: en effet soit $\gamma' \geqq \gamma$ tel que $\mathcal{H}^m_{\gamma'}$ soit vérifiée; Ker $\mathcal{S}^m_{\gamma'}$ est de dimension finie et contient Ker $\mathcal{S}^m_\gamma$.

Donc Im $\mathcal{S}^m_\gamma$ n'est pas fermée.

9. Existence de solutions. Contrairement au cas du secteur (Théorème 5.3), nous n'avons pas encore de conditions d'existence de solutions. Nous partons du théorème suivant, issu de la résolution d'un problème variationnel: [**9**].

THEOREME 9.1. *Soit* $(f_1, f_2, g) \in H^{-1} \times H^{-1} \times L^2(\Omega)$ *tel que*

$$\int_\Omega g\,dx\,dy = 0.$$

Il existe un unique $(w_1, w_2) \in H_0{}^1 \times H_0{}^1(\Omega)$ *et un élément* p *de* $L^2(\Omega)$ *unique à une constante additive près tels que:*

$$\mathscr{S}(w_1, w_2, p) = (f_1, f_2, g).$$

La relation entre "solution variationnelle" et espaces à poids se fait par:

LEMME 9.2. *Si* m *et* $\boldsymbol{\gamma}$ *sont tels que* $\mathbf{n} \leqq \mathbf{0}$ *alors*

$$E_{\boldsymbol{\gamma}}^m \hookrightarrow H^{-1} \times H^{-1} \times L^2 \quad et \quad D_{\boldsymbol{\gamma}}^m \hookrightarrow H_0{}^1 \times H_0{}^1 \times L^2.$$

S'il existe j *tel que* $\eta_j > 0$, *ces inclusions sont fausses.*

THEOREME 9.3 (régularité de base des solutions variationnelles). *Si* $(f_1, f_2, g) \in E_{\mathbf{m+1}}^m$ *est tel que*

$$\int_\Omega g dx dy = 0,$$

alors "le" (w_1, w_2, p) *donné par le Théorème* 9.2 *est dans* $D_{\mathbf{m+1}}^m$.

Preuve. Nous avons:

$$(w_1, w_2, p) \in H_0{}^1 \times H_0{}^1 \times L^2(\Omega).$$

L'inclusion de $H_0{}^1$ dans $\Pi_{\mathbf{0}}{}^1$ est classique. Ainsi $(w_1,\ w_2,\ p)$ est dans $\Pi_{\mathbf{0}}{}^1 \times \Pi_{\mathbf{0}}{}^1 \times L^2$, donc dans $D_{\mathbf{0}}{}^{-1}$. Le théorème se déduit alors du Théorème de régularité 5.2 appliqué aux Ω_j (pour $\eta_0 = \eta_\infty = 0$) et de la régularité intérieure sur Ω_0[**1**], en opérant par partition de l'unité.

APPLICATION DU THEOREME 8.2. *Soit* m *et* $\boldsymbol{\gamma}$ *tels que* $\mathbf{n} \leqq 0$ *et* $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\gamma}}^m$ *soit vérifiée. Soit* $(f_1, f_2, g) \in E_{\boldsymbol{\gamma}}^m$ *tel que*

$$\int_\Omega g dx dy = 0.$$

"La" solution variationnelle $\mathscr{U} = (w_1,\ w_2,\ p)$ *donnée par le Théorème* 9.1 *appartient à* $D_{\mathbf{m+1}}^m$ *et se décompose selon* (8.1) *avec:*

$$\boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{m} + \mathbf{1} \quad (\mathbf{n}' = 0).$$

Nous retrouvons comme cas particulier $(\boldsymbol{\gamma} = 0)$ le résultat de [**6**].

Nous allons établir l'existence de solutions en dehors du cadre variationnel: $\mathbf{n} > \mathbf{0}$.

LEMME (et notation) 9.4. a) *Si* $\mathbf{n} < \mathbf{1}$, $\Pi_{\boldsymbol{\gamma}}^{m+1} \hookrightarrow L^1$

$$\overset{*}{E}{}_{\boldsymbol{\gamma}}^m = \left\{ \mathscr{G} \in E_{\boldsymbol{\gamma}}^m \Big/ \int_\Omega \pi_3 \mathscr{G} = 0 \right\}$$

est un hyperplan fermé de $E_{\boldsymbol{\gamma}}^m$ *qui contient* $\operatorname{Im} \mathscr{S}_{\boldsymbol{\gamma}}^m$. *(*$\pi_3 \mathscr{G}$ *désigne évidemment la* 3[e] *composante de* $\mathscr{G}$.*)*

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

b) *S'il existe j tel que $\eta_j > 1$, alors: il existe $\mathscr{U}^* \in D_{\Upsilon}^m$ tel que*

$$\int_\Omega \pi_3(\mathscr{S}\mathscr{U}^*) = 1.$$

Dans ce cas $\overset{*}{E}{}_{\Upsilon}^m$ désignera E_{Υ}^m.

Preuve. a) Lorsque $\mathbf{n} < \mathbf{1}$, on montre facilement à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\Pi_{\Upsilon}^{m+2} \hookrightarrow W^{1,1} \quad \text{et} \quad \Pi_{\Upsilon}^{m+1} \hookrightarrow L^1.$$

Les propriétés de $\overset{*}{E}{}_{\Upsilon}^m$ découlent alors de la formule de Green car:

$$\pi_3\mathscr{G} = \operatorname{div}(w_1, w_2) \quad \text{et} \quad w_{1|\partial\Omega}, w_{2|\partial\Omega} = 0.$$

b) Nous allons montrer un résultat plus précis dont découlera facilement le résultat annoncé.

LEMME (et notation) 9.5. *Soit $j \in \{1, \ldots, N\}$. Dans tout l'ensemble des singularités $U_{j\tau}$, pour $\tau \in \mathscr{F}_j$, et des singularités $V_{j\tau}$, pour $\tau \in \mathscr{F}_j'$, il existe un seul élément U_j^* tel que:*

$$\int_\Omega \pi_3(\mathscr{S}U_j^*) \neq 0.$$

Si $\omega_j \neq \omega_0$, $U_j^* = U_{j,i}$ où ω_0 est défini en (3.10). *Si $\omega_j = \omega_0$, $U_j^* = V_{j,i}$.*

Preuve. Soit (w_1, w_2, p) une singularité. C'est un $U_{j\tau}$ ou un $V_{j\tau}$.

$$\mathscr{S}(w_1, w_2, p) = (f_1, f_2, g).$$

Comme les $\mathscr{S}Y_{j\tau}$ et $\mathscr{S}Z_{j\tau}$ sont nuls, le support de g est contenu dans la couronne

$$C(A_j, 1, 2) : \int_\Omega g = \int_{\Omega_j} g.$$

On est ramené au cas du secteur. C'est pourquoi nous nous replaçons dans le cadre du début: Ω secteur de sommet 0, d'ouverture ω, etc. (w_1, w_2, p) est un ϕY_τ ou un ϕZ_τ.

Effectuons sur (w_1, w_2, p) et (f_1, f_2, g) les transformations χ_D et χ_E définies en (2.1) et (2.2). Nous obtenons:

$$\int_\Omega g dx dy = \int_B (D_t U + U + D_\theta V) e^t dt d\theta$$
$$= \int_B D_t(e^t U) + D_\theta(e^t V) dt d\theta.$$

Comme supp $g \subset C(0, 1, 2)$, on intègre en (t, θ) sur le rectangle

$$R = [0, \operatorname{Log} 2] \times [0, \omega].$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

Tout étant C^∞ sur R, on peut appliquer la formule de Green. D'où:

$$\int_\Omega g dx dy = \int_{\partial R} e^t(U\nu_t + V\nu_\theta)d\theta.$$

U et V étant nuls sur les trois côtés de R : $\theta = 0$, $\theta = \omega$, $t = \text{Log } 2$, il reste $t = 0$:

$$\int_\Omega g dx dy = \int_0^\omega U(0, \theta)d\theta. \tag{9.1}$$

Si (w_1, w_2, p) est un ϕY_τ,

$$U(0, \theta) = s_1(\theta) \quad \text{où} \quad (s_1, s_2, s_3) \in \text{Ker } S_\tau\backslash\{0\}$$

(considérer (5.10) et (5.12) en remarquant que ϕ vaut 1 pour $r = 1$). (9.1) donne:

$$\int_\Omega g dx dy = \int_0^\omega s_1(\theta)d\theta.$$

Si $\tau \neq i$, $s_1 = -s_2'/(i\tau + 1)$; comme $s_2 \in H_0{}^1(]0, \omega[)$ on a donc:

$$\int_\Omega g dx dy = 0.$$

Si $\tau = i$, le calcul de Ker S_i montre que l'on a:

$$s_1(\theta) = \cos(2\theta - \omega) - \cos\omega.$$

D'où

$$\int_\Omega g dx dy = \sin\omega - \omega\cos\omega;$$

c'est nul si et seulement si $tg\omega = \omega$.

Si (w_1, w_2, p) est un ϕZ_τ, (9.1) donne à l'aide de (5.11) et (5.13):

$$\int_\Omega g dx dy = \int_0^\omega \sigma_1(\theta)d\theta$$

où $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est tel que $S_\tau(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -S_\tau'(s_1, s_2, s_3)$. Si $\tau \neq i$, on a:

$$\sigma_1 = -\frac{is_1 + \sigma_2'}{i\tau + 1}.$$

Comme

$$\int_0^\omega s_1(\theta)d\theta = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2 \in H_0^1(]0, \omega[),$$

on a:

$$\int_\Omega g dx dy = 0.$$

Si $\tau = i$, il ne reste que le cas où $\omega = \omega_0$ (sinon Z_i n'existe pas). Un calcul explicite montre alors que

$$\int_0^{\omega} \sigma_1(\theta) d\theta \neq 0.$$

THEOREME 9.6. *Soit* m, $\boldsymbol{\gamma}$ *tels que* $\mathbf{n} \geqq \mathbf{0}$ *et* $\mathcal{H}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ *soit vérifiée. Pour tout* $\mathcal{G} \in \overset{*}{E}{}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ (*notation* 9.4), *il existe* $\mathcal{U} \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ *tel que* $\mathcal{S}\mathcal{U} = \mathcal{G}$.

Preuve. Pour $j \in \{1, \ldots, N\}$, $\phi_j \mathcal{G} \in E^m_{\gamma_j,\gamma_j}(\Omega_j)$. Par le Théorème 5.3, nous savons qu'il existe $\mathcal{V}_j \in D^m_{\gamma_j,\gamma_j}(\Omega_j)$ tel que $\mathcal{S}\mathcal{V}_j = \phi_j\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{U}_0 = \sum_j \phi_j \mathcal{V}_j$.

$$\mathcal{U}_0 \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}}(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{G} - \mathcal{S}\mathcal{U}_0 \in E^m_{\mathbf{m+1}}$$

(il est nul sur tous les $D(A_j, 1)$).

Si $\mathbf{n} < \mathbf{1}$, nous voyons par le Lemme 9.4 que $\mathcal{G} - \mathcal{S}\mathcal{U}_0 \in \overset{*}{E}{}^m_{\mathbf{m+1}}$. Le Théorème 9.3 nous donne un antécédent $\mathcal{U}_1$ dans $D^m_{\mathbf{m+1}}$ à $\mathcal{G} - \mathcal{S}\mathcal{U}_0$. Comme $\mathbf{n} \geqq \mathbf{0}$, $D^m_{\mathbf{m+1}} \subset D^m_{\boldsymbol{\gamma}}$. $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1$ convient.

Si $\exists j$ tel que $\eta_j > 1$, considérons le $\mathcal{U}^*$ du Lemme 9.4. Il existe un coefficient c tel que

$$\mathcal{G} - \mathcal{S}\mathcal{U}_0 - c\mathcal{S}\mathcal{U}^* \in \overset{*}{E}{}^m_{\mathbf{m+1}}.$$

On termine comme dans le cas précédent: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + c\mathcal{U}^* + \mathcal{U}_1$.

Application. Pour m et $\boldsymbol{\gamma}$ tels que $\mathcal{H}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ soit vérifiée et $\mathcal{G} \in \overset{*}{E}{}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$, le théorème précédent et le Théorème 8.2 appliqué pour $\boldsymbol{\gamma}' = \sup(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{m+1})$ fournissent des solutions au problème $\mathcal{S}\mathcal{U} = \mathcal{G}$ ainsi que leurs décompositions en parties régulières et singulières.

10. Théorèmes d'indices. Nous utiliserons les quantités suivantes:

$$\mathcal{P}(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{N} (\operatorname{card}\mathcal{F}_j(\mathbf{0}, \mathbf{n}) + \operatorname{card}\mathcal{F}_j'(\mathbf{0}, \mathbf{n}))$$

$$\mathcal{Q}(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{N} (\operatorname{card}\mathcal{F}_j(\mathbf{n}, \mathbf{0}) + \operatorname{card}\mathcal{F}_j'(\mathbf{n}, \mathbf{0})).$$

THEOREME 10.1. m, $\boldsymbol{\gamma}$ *sont tels que* $\mathcal{H}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ *soit vérifiée.*

a) *On suppose* $\mathbf{n} \leqq \mathbf{0}$:

a1: *si* $\mathbf{n} > -\mathbf{1}$ $\operatorname{Ker}\mathcal{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ *est engendré par* $(0, 0, 1)$,

$$\operatorname{Codim}(\operatorname{Im}\mathcal{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}) = \mathcal{Q}(\mathbf{n}) + 1.$$

a2: *s'il existe* j *tel que* $\eta_j < -1$, $\mathcal{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ *est injectif*,

$$\operatorname{Codim}(\operatorname{Im}\mathcal{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}) = \mathcal{Q}(\mathbf{n}).$$

b) *On suppose* $\mathbf{n} \geqq \mathbf{0}$:
b1: *si* $\mathbf{n} < \mathbf{1}$

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}} = \mathscr{P}(\mathbf{n}) + 1,$$
$$\operatorname{Codim} (\operatorname{Im} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}) = 1.$$

b2: *s'il existe* j *tel que* $\eta_j > 1$, $\mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ *est surjectif*,

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}} = \mathscr{P}(\mathbf{n}).$$

Preuve. a) Les propriétés du noyau proviennent du Théorème 9.1 (cadre variationnel) et du fait que, dans le cas a1, $(0, 0, 1) \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}}$, et dans le cas a2, $(0, 0, 1) \notin D^m_{\boldsymbol{\gamma}}$.

Les propriétés de l'image viennent de la décomposition en parties régulière et singulière (voir Théorème 9.3 et application). Dans le cas a1, les $\mathscr{S}\mathscr{U}_{j\tau}$ pour $\tau \in \mathscr{F}_j(\mathbf{n}, \mathbf{0})$ et les $\mathscr{S} V_{j\tau}$ pour $\tau \in \mathscr{F}_j'(\mathbf{n}, \mathbf{0})$ forment une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Im} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ dans $\mathring{E}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$. Dans le cas a2, la codimension de l'image baisse d'un cran parce qu'il y a une relation de liaison entre les $\mathscr{S} U_{j\tau}$, $\mathscr{S} V_{j\tau}$ et $\operatorname{Im} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$: Nous avons:

$$\mathscr{S}\left(\sum_{j=0}^{N} \phi_j(0, 0, 1)\right) = 0.$$

D'où:

$$\sum_{\eta_j<-1} \mathscr{S} U_{j,-i} = -\mathscr{S}\left[\phi_0(0, 0, 1) + \sum_{\eta_j>-1} \phi_j(0, 0, 1)\right]$$

(car $Y_{-i} = (0, 0, 1_{\Omega_j})$).

On a donc:

$$\sum_{\eta_j<-1} \mathscr{S} U_{j,-i} \in \operatorname{Im} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}.$$

b) Le Théorème 9.6 règle la question de l'image. Quant au noyau, les Lemmes 7.3 et 9.5 montrent que les $\mathscr{S} U_{j\tau}$ et $\mathscr{S} V_{j\tau}$ appartiennent tous à $\mathring{E}^m_{\mathbf{m+1}}$, à l'exception de $\mathscr{S} U_j^*$. Pour $\tau \in \mathscr{F}_j(\mathbf{0}, \mathbf{n})$ les $U_{j\tau}$ appartiennent à $D^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ et non à $D^m_{\mathbf{m+1}}$. Il existe donc des $X_{j\tau} \in D^m_{\mathbf{m+1}}$ tels que $\mathscr{S} X_{j\tau} = \mathscr{S} U_{j\tau}$ (Théorème 9.3). On pose

$$K_{j\tau} = U_{j\tau} - X_{j\tau}.$$

Les $K_{j\tau}$ sont des éléments non nuls de $D^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ tels que $\mathscr{S} K_{j\tau} = 0$. On construit sur le même modèle les $L_{j\tau}$ à partir des $V_{j\tau}$.

Dans le cas b1, les $K_{j\tau}$, les $L_{j\tau}$ et $(0, 0, 1)$ forment une base de Ker $\mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$. Dans le cas b2, la dimension baisse d'un cran à cause des U_j^*: soit

$$J_0 = \{j \in \{1, \ldots, N\}, \eta_j > 1\}.$$

Supposons que

$$\int_{\Omega} \pi_3(\mathscr{S} U_j^*) = 1.$$

Soit j_0 un élément fixé de J_0. On a alors $\forall j \in J_0 \backslash \{j_0\}$

$$\mathscr{S}(U_j^* - U_{j_0}^*) \in \overset{*}{E}{}^m_{\mathbf{m}+\mathbf{1}}.$$

On construit alors comme ci-dessus des éléments de Ker $\mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ à l'aide des $U_j^* - U_{j_0}^*$. Dans les deux cas b1 et b2, pour montrer que les éléments construits forment une base de Ker $\mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$, on utilise le Théorème 8.2 appliqué pour les poids $\mathbf{m}+\mathbf{1}$ et $\boldsymbol{\gamma}$: on arrive à décomposer un élément de Ker $\mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ en une partie "singulière" combinaison linéaire des $K_{j\tau}$, etc. et d'une partie "régulière" qui est un élément de Ker $\mathscr{S}^m_{\mathbf{m}+\mathbf{1}}$, "singulière" et "régulière" étant pris au sens de $D^m_{\mathbf{m}+\mathbf{1}}$.

Voici le théorème d'indice général:

THEOREME 10.2. *m, $\boldsymbol{\gamma}$ sont tels que $\mathscr{H}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ soit vérifiée. Alors*

$$\operatorname{Ind} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}} = \mathscr{P}(\mathfrak{n}) - \mathscr{Q}(\mathfrak{n}).$$

Preuve. Nous allons faire la démonstration dans le cas où $-\mathbf{1} < \mathfrak{n} < \mathbf{1}$. Pour simplifier les expressions, nous condensons les notations de la façon suivante: les fonctions $U_{j\tau}$ pour $\tau \in \mathscr{F}_j(\mathbf{0}, \mathfrak{n})$ et $V_{j\tau}$ pour $\tau \in \mathscr{F}_j'(\mathbf{0}, \mathfrak{n})$ constituent un ensemble de U_p avec p décrivant un ensemble fini P. On a évidemment: card $P = \mathscr{P}(\mathfrak{n})$. Ce sont les U_p qui servent à construire une base de Ker $\mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}'}$, où $\boldsymbol{\gamma}' = \sup(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{m}+\mathbf{1})$. Rappelons le schéma: pour $p \in P$, soit $X_p \in D^m_{\mathbf{m}+\mathbf{1}}$ tel que $\mathscr{S} X_p = \mathscr{S} U_p$. On définit $K_p = U_p - X_p$. $\{K_p/p \in P\}$ et $(0, 0, 1)$ forment une base de Ker $\mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}'}$.

D'autre part, les fonctions $U_{j\tau}$ pour $\tau \in \mathscr{F}_j(\mathfrak{n}, \mathbf{0})$ et $V_{j\tau}$ pour $\tau \mathscr{F}_j'(\mathfrak{n}, \mathbf{0})$ constituent un ensemble de U_q avec q décrivant un ensemble fini Q (disjoint de P, bien sûr!). Les U_q sont les fonctions singulières relatives à $\mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}''}$ où

$$\boldsymbol{\gamma}'' = \inf(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{m}+\mathbf{1}); \text{ card } Q = \mathscr{Q}(\mathfrak{n}).$$

Caractérisons le noyau de $\mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$. Evidemment:

$$\operatorname{Ker} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}} \subset \operatorname{Ker} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}'}.$$

Il suffit de déterminer les $(a_p)_{p \in P}$ dans $\mathbf{C}^P$ pour lesquels

$$\sum_{p \in P} a_p K_p \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}} \quad (\text{condition } \mathscr{C}).$$

Comme les $U_p \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ (Lemme 7.1), $\mathscr{C}$ équivaut à:

$$\sum a_p X_p \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}}.$$

Or $X_p \in D^m_{\mathbf{m}+\mathbf{1}}$ et $\mathscr{S} X_p = \mathscr{S} U_p \in E^m_{\boldsymbol{\gamma}''}$ (Lemme 7.3).

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

Le Théorème 8.2 appliqué pour les poids $\boldsymbol{\gamma}''$ et $\mathbf{m}+\mathbf{1}$ donne:

$$X_p = X_{p,0} + \sum_{q\in Q} \lambda_{p,q} U_q$$

avec $X_{p,0} \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}''}$.

Donc $\mathscr{C}$ équivaut à:

$$\sum_{p\in P} \sum_{q\in Q} a_p \lambda_{p,q} U_q \in D_{\boldsymbol{\gamma}}{}^m.$$

Le Lemme 7.2 fournit alors:

$$\sum_{p\in P} a_p K_p \in D_{\boldsymbol{\gamma}}{}^m$$

équivaut à: $\forall q \in Q$

$$\sum_{p\in P} a_p \lambda_{p,q} = 0.$$

Soit $\Lambda_{P,Q}$ l'application linéaire $\mathbf{C}^P \to \mathbf{C}^Q$ définie par

$$(a_p) \to (b_q) = \left(\sum_{p\in P} a_p \lambda_{p,q}\right).$$

Nous avons:

$$\dim \operatorname{Ker} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}} = \dim \operatorname{Ker} \Lambda_{P,Q} + 1.$$

Pour avoir la codimension de l'image, déterminons les $(b_q)_{q\in Q}$ pour lesquels

$$\sum_{q\in Q} b_q \mathscr{S} U_q \in \operatorname{Im} \mathscr{S}_{\boldsymbol{\gamma}}{}^m$$

(condition $\mathscr{D}$). En effet, par les Théorèmes 8.2 et 9.6 nous savons que les $\mathscr{S} U_q$ engendrent un complémentaire de $\operatorname{Im} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$ dans $\overset{*}{E}{}^m_{\boldsymbol{\gamma}}$. $\mathscr{D}$ équivaut à:

$$\exists\, \mathscr{U} \in D^m_{\boldsymbol{\gamma}}: \mathscr{S}(\textstyle\sum b_q U_q) = \mathscr{S}\mathscr{U}.$$

Comme $\mathscr{U}$ et $\sum b_q U_q$ appartiennent à $D^m_{\boldsymbol{\gamma}'}$, $\mathscr{D}$ équivaut à:

$$\exists\, \mathscr{U} \in D_{\boldsymbol{\gamma}}{}^m, \exists\, (a_p) \in \mathbf{C}^P \quad \sum_{q\in Q} b_q U_q = \sum_{p\in P} a_p K_p + \mathscr{U}.$$

En faisant la même décomposition que ci-dessus, on obtient que $\mathscr{D}$ équivaut à:

$$\exists\, (a_p) \in \mathbf{C}^P \quad \sum_{q\in Q} b_q U_q - \sum_{p\in P} \sum_{q\in Q} a_p \lambda_{p,q} U_q \in D_{\boldsymbol{\gamma}}{}^m.$$

Par le lemme 7.2 cela équivaut à:

$$\exists\, (a_p) \in \mathbf{C}^P \quad \forall q \in Q \quad \sum_{p\in P} a_p \lambda_{p,q} = b_q.$$

De cela nous déduisons facilement que:

$$\operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathscr{S}^m_{\boldsymbol{\gamma}} = \operatorname{Codim} \operatorname{Im} \Lambda_{P,Q} + 1.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-059-2 Published online by Cambridge University Press

Finalement:

$$\operatorname{Ind} \mathscr{S}_{\boldsymbol{\gamma}}^{m} = \operatorname{Ind} \Lambda_{P,Q} = \operatorname{card} P - \operatorname{card} Q.$$

Pour les autres cas, nous voyons pourquoi la formule de l'indice est vraie quand $\mathfrak{n} \leqq \mathbf{0}$ (Théorème 10.1, a) en remarquant qu'alors $\mathscr{P}(\mathfrak{n}) = 0$) et quand $\mathfrak{n} \geqq \mathbf{0}$ (id. avec $\mathscr{Q}(\mathfrak{n}) = 0$). Dans le cas le plus général, la démonstration procède de la même technique que ci-dessus (se ramener à calculer l'indice d'une application d'un e.v. de dim. finie dans un e.v. de dim. finie) en tenant compte des situations particulières lorsque l'un des η_j est < -1 ou > 1.

Nous laissons les détails au lecteur.

11. Cas où $\eta = -1$. Toutes les fonctions discriminantes F_j s'annulant en $-i$, l'hypothèse $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\gamma}}^{m}$ n'est pas vérifiée si $\boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{m}+\mathbf{1}) = -\mathbf{1}$, i.e., si $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{m}$. Cependant, grâce à l'étude faite au § 6 du pôle "régulier" $\tau = -i$, nous pouvons obtenir des résultats du type du Théorème 6.1.

THEOREME 11.1 *Supposons qu'aucune ouverture ω_j ne soit égale à ω_0* (3.10). *Soit $\mathscr{G} \in \overset{*}{E}{}_{\mathbf{m}}^{m}(\Omega)$. Soit $\mathscr{U}$, "solution variationnelle" du problème:*

$$\mathscr{S}\mathscr{U} = \mathscr{G} \quad (\textit{Théorème } 9.1).$$

Par le théorème 9.3, *nous savons que $\mathscr{U} \in D_{\mathbf{m+1}}^{m}$. Alors $\mathscr{U}$ se décompose de manière unique en une partie "régulière" et une partie singulière:*

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}_0 + \sum_{j=1}^{N} \Bigg(\sum_{\substack{\tau \in \mathscr{F}_j(-\mathbf{1},\,\mathbf{0}) \\ \tau \neq -i}} \lambda_{j\tau} U_{j\tau} + \sum_{\tau \in \mathscr{F}_j'(-\mathbf{1},\,\mathbf{0})} \mu_{j\tau} V_{j\tau} \Bigg) \tag{11.1}$$

où $\mathscr{U}_0$ vérifie les estimations (on écrit $\mathscr{U}_0 = (w_1, w_2, p)$):

$$\|w_1\|_{\Pi_{\mathbf{m}}^{m+2}} + \|w_2\|_{\Pi_{\mathbf{m}}^{m+2}} + \|D_x p\|_{\Pi_{\mathbf{m}}^{m}} + \|D_z p\|_{\Pi_{\mathbf{m}}^{m}} \leqq C(\|\mathscr{G}\|_{E_{\mathbf{m}}^{m}} + \|\mathscr{U}\|_{D_{\mathbf{m+1}}^{m}}). \tag{11.2}$$

Preuve. Soit ϵ tel que:

$$\epsilon > 0 \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, N\} \mathscr{F}_j(-1, -1+\epsilon) \text{ soit réduit à } -i. \tag{11.3}$$

L'application du Théorème 8.2 pour $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{m} + \boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{m}+\mathbf{1}$ donne $\mathscr{U}_0$ dans $D_{\mathbf{m}+\boldsymbol{\varepsilon}}^{m}$ et la décomposition (11.1). La régularité supplémentaire de $\mathscr{U}_0$ et les estimations (11.2) proviennent de l'application du Théorème 6.1 sur Ω_j pour les seconds membres $\mathscr{S}(\phi_j \mathscr{U})$ et les valeurs: $\eta_0 = -1$ et $\eta_\infty = -1 + \epsilon$.

Remarque 1.

(11.4) Le majorant dans (11.2) peut se réduire à $C\|\mathscr{G}\|_{E_{\mathbf{m}}^{m}}$.

En effet, $\forall c \in \mathbf{C}$,

$$\mathscr{S}(\mathscr{U} + (0, 0, c)) = \mathscr{G}.$$

Si on considère $\mathscr{U} + (0, 0, c)$ au lieu de $\mathscr{U}$, le membre de gauche de (11.2) ne change pas, et le membre de droite devient:

$$\|\mathscr{G}\|_{E^m_{\mathbf{m}}} + \|\mathscr{U} + (0, 0, c)\|_{D^m_{\mathbf{m}+1}}.$$

Or une conséquence du Théorème 10.1 pour $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ est que:

$$\inf_{c\in\mathbf{C}} \|\mathscr{U} + (0, 0, c)\|_{D^m_{\mathbf{m}+1}} \leqq C\|\mathscr{G}\|_{E^m_{\mathbf{m}+1}} \leqq C\|\mathscr{G}\|_{E^m_{\mathbf{m}}}.$$

D'où (11.2).

Remarque 2. Une application immédiate du Théorème 11.1 et de (11.4) pour $m = 0$ donne que, si aucun ω_j n'est égal à ω_0 (3.10), l'opérateur

$$\mathscr{S} : (\Pi_0^2 \cap H_0^1) \times (\Pi_0^2 \cap H_0^1) \times (H^1/\mathbf{C}) \rightarrow L^2 \times L^2 \times \Pi_{\mathbf{0}}^1$$

est à image fermée (parce qu'on a remplacé $\Pi_{\mathbf{0}}^1$ par $H^1/\mathbf{C}$). Il est injectif et son image est de codimension $1 + \mathscr{Q}(-\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon})$ (où ϵ vérifie (11.3)).

Pratiquement:

$$\mathscr{Q}(-\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \operatorname{card}\{j/\omega_j > \pi\} + \operatorname{card}\{j/\omega_j > \omega_0\}.$$

Lorsque Ω est convexe, $\mathscr{Q}(-\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon})$ est nul et on retrouve le résultat de [**4**].

Bibliographie

1. S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*, Comm. Pure Appl. Math. *17* (1964), 35–92.

2. P. Grisvard, *Singularité des solutions du problème de Stokes dans un polygone*, Université de Nice (1979), preprint.

3. J. P. Guillement, *Problème biharmonique dans un secteur plan*, Séminaire d'analyse Nantes (1978/79), 143–160.

4. R. B. Kellogg and J. E. Osborn, *A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon*, J. of Functional Analysis *21* (1976), 397–431.

5. V. A. Kondrat'ev, *Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc. *16* (1967) 227–313: Translated by Amer. Math. Soc. (1968).

6. J. E. Osborn, *Regularity of solutions of the Stokes problem in a polygonal domain*, Numerical solution of Partial Differential Equations III (1975), 393–411.

7. Pham The Lai, *Problème de Dirichlet dans un cône avec paramètre spectral pour une classe d'espaces de Sobolev à poids*, Comm. in Partial Differential Equations *4* (1979), 389–445.

8. J. L. Steux, *Problème de Dirichlet dans un secteur plan pour une classe d'espaces de Sobolev à poids dans L^p*, Thèse 3è cycle, Nantes (1980).

9. Temam, *Navier Stokes equations, theory and numerical analysis* (North-Holland).

Institut de Mathématiques et d'Informatique,
Nantes, France