PAPER 49

ÜBER DIE STABILITÄT EINES ZYLINDRISCHEN GASLEITERS IM MAGNETISCHEN FELDE*

W. D. SCHAFRANOW

Academy of Sciences, Moscow, U.S.S.R.

In der Arbeit [1] wurde die Stabilität eines Zylinders aus vollständig ionisiertem Plasma untersucht, dessen Druck durch die magnetischen Kräfte des längs des Zylinders fliessenden Stromes im Gleichgewicht gehalten wird. Störungen wurden untersucht, bei welchen der Zylinder eine schraubenförmige Gestaltung erhält. Gegenüber diesen Störungen zeigte sich das Gleichgewicht labil. In der vorliegenden Arbeit, gerade wie in [1], wird mit Hilfe der Methode von kleinen Schwingungen und unter der Annahme einer idealen Leitfähigkeit die Stabilität gegenüber beliebigen Störungen in Anwesenheit einer magnetischen Feldkomponente, die längs des Zylinders gerichtet ist ('Längsfeld'), untersucht. Kriterien der Stabilität werden festgestellt.

Das Ausgangssystem der Gleichungen besteht aus Gleichungen der magnetischen Hydrodynamik für ein ideal leitendes Medium:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho \operatorname{div} \vec{\mathbf{v}}=0, \quad \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t}=\operatorname{rot}\,[\vec{\mathbf{v}}\,\vec{\mathbf{H}}], \tag{1}$$

$$p=\text{const.}\ \rho^{\gamma}, \qquad \rho\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}=-\nabla p+\frac{1}{c}\,[\vec{\mathbf{j}}\,\vec{\mathbf{H}}].$$

Beim Gleichgewicht ist $v=0$, $\partial/\partial t=0$, der Zylinder ist in der Richtung der Achse und des Azimuts homogen $\partial/\partial z=\partial/\partial\phi=0$. Die Komponenten des Feldes H_z^0 und H_ϕ^0 sind von Null verschieden. Wir nehmen an, dass innerhalb des Zylinders $H_\phi^0=0$ und H_z^0 überall homogen ist.

$$\left.\begin{aligned} &H_{\phi i}^0=0, \quad H_{\phi e}(r)=\frac{2I}{ca}, \\ &H_{zi}^0=h_i H_{\phi e}^0(a)=\text{const.} \quad H_{ze}^0=h_e H_{\phi e}^0(a)=\text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

* Presented at the Symposium by L. A. Artsimovich.

Die Indexe i, e beziehen sich bzw. auf das innere und äussere Feld. In diesem Falle ist die Dichte und der Druck über dem Querschnitt konstant, wobei

$$8\pi p^0 = H_{ze}^{02} + H_{\phi e}^{02}(a) - H_{zi}^{02} = H_{\phi e}^{02}(a)\ (1 + h_e^2 - h_i^2). \tag{3}$$

Es ist bequem, die Störungen in Koordinaten von Lagrange zu untersuchen. Es sollen die Gasteilchen eine Verschiebung $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})\ e^{i(kz+m\phi+\omega t)}$ erfahren. In einer linearen Annäherung in Beziehung auf die Störungen sind die Korrektionen aller Grössen zur Verschiebung proportional: $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^{(1)} e^{i(kz+m\phi+\omega t)}$ u.d.gl. Aus (1) erhalten wir Gleichungen für diese Korrektionen:

$$\rho^{(1)} = -\rho^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{H}_i^{(1)} = \operatorname{rot}\,[\boldsymbol{\xi}\mathbf{H}_i^0], \tag{4}$$

$$p^{(1)} = -\gamma p^0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}, \quad \omega^2 \boldsymbol{\xi} + c^2 \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \frac{c_H^2}{H_{zi}^{02}}\,[\operatorname{rot} \mathbf{H}_i . \mathbf{H}_i^0] = 0,$$

$$c^2 = \frac{\gamma p^0}{\rho^0}, \quad c_H^c = \frac{H_i^{02}}{4\pi\rho^0}. \tag{5}$$

Die Gleichung für $\boldsymbol{\xi}$ hat die folgende Lösung:

$$\xi_z = C_m I_m(\alpha r), \quad \xi_\phi = C_m \frac{k^2c^2 - \omega^2}{\alpha^2 c^2} I_m(\alpha r),$$

$$\xi_r = iC_m \frac{k^2c^2 - \omega^2}{k\alpha c^2} \left[\frac{m}{\alpha r} I_m(\alpha r) - I_{m-1}(\alpha r)\right], \tag{6}$$

$$\alpha^2 = \frac{\left(k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}\right)\left(k^2 - \dfrac{\omega^2}{c_H^2}\right)}{k^2 - \omega^2\left(\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{c_H^2}\right)}. \tag{7}$$

Als Längenmasstab wird überall der Zylinderradius a angenommen.

Korrektionen zum Felde ausserhalb des Zylinders werden aus den Gleichungen $\mathbf{H} = \nabla\psi$, $\nabla\psi = 0$ erhalten. Unter Annahme von

$$\psi = \psi^0 = \psi^{(1)}\ e^{i(kz+m\phi+\omega t)}$$

erhalten wir für $\psi^{(1)}$ eine Besselgleichung m-er Ordnung vom imaginären Argument, deren Lösung, auf $r \to \infty$ begrenzt, $\psi^{(1)}(r) = \text{const}\ K_m(kr)$ ist. Die Integrationskonstante wird aus der Kontinuitätsbedingung der normalen Feldkomponente zur Zylinderoberfläche bestimmt. Infolge der idealen Leitfähigkeit werden die magnetischen Kraftlinien vom Stoff mitgenommen, wobei sie parallel zur Oberfläche verbleiben. Daher ist die normale Feldkomponente gleich Null und das äussere Feld vom Inneren unabhängig. Wollen wir den Wert der ersteren auf der Oberfläche des erregten Zylinders hinschreiben

$$\begin{aligned} H^{(1)}_{ze} &= i\xi_r(a)\ (mH^0_{\phi e}+kH^0_{ze}), \\ H^{(1)}_{\phi e} &= \xi_r(a)\ m(mH^0_{\phi e}+kH^0_{ze}) \Big/ \left[k\,\frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)}+m\right], \\ H^{(1)}_{ze} &= \xi_r(a)\ k(mH^0_{\phi e}+kH^0_{ze}) \Big/ \left[k\,\frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)}+m\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Die erhaltene Lösung für die Korrektionen ist für einen vollständig bestimmten Eigenwert von ω^2 gültig, dessen Vorzeichen sagt, ob das Gleichgewicht gegen die gegebene Störung stabil ($\omega^2>0$) oder labil ($\omega^2<0$) ist. Dieser Eigenwert wird aus der Grenzbedingung erhalten, welche aus der Bewegungsgleichung hergeleitet wird. Bei unserer Aufgabestellung kommt es auf die Forderung hinaus, dass auf der Zylinderoberfläche die folgende Bedingung erfüllt werden soll:

$$8\pi p = H^2_{\phi e}+H^2_{ze}-H^2_{zi}. \tag{9}$$

In Anbetracht, dass

$$H^2_{\phi}(a+\xi_r)=H^{02}_{\phi}(a)+2H^{0}_{\phi}(a)\ H^{(1)}_{\phi}(a)+\frac{\partial H^{02}_{\phi}}{\partial r}\,\xi_r(a)$$

u.s.w. ist, und unter Berücksichtigung von (3) und (4) bei $r=a=1$ erhalten wir

$$-\gamma p^0 \operatorname{div}\vec{\xi} = -\frac{\xi_r}{4\pi}\left\{H^{02}_{\phi e}-\frac{(mH^0_{\phi e}+kH^0_{ze})^2}{k\,\dfrac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)}+m}\right\}-i(\operatorname{div}\vec{\xi}-ik\xi_z)\,\frac{H^{02}_{zi}}{4\pi}. \tag{10}$$

Wenn wir die Werte von $\vec{\xi}$ aus (6) einsetzen, können wir die Bedingung folgendermassen niederschreiben:

$$\frac{\gamma}{2}(1+h_e^2-h_i^2)\,\frac{\omega^2}{\omega^2-k^2c^2}=\left(\frac{I_{m-1}(\alpha)}{\alpha I_m(\alpha)}-\frac{m}{\alpha^2}\right)\left[1-\frac{(m+k.h_e)^2}{k\,\dfrac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)}+m}\right]-h_i^2\equiv f(\omega^2). \tag{11}$$

Diese Gleichung hat ausser dem positiven Spektrum von Lösungen $\omega^2>0$, die den Schall- und Alfvénwellen eines Gases im gestörten Zylinder entsprechen, noch einen Zweig der Eigenwerte $\omega^2_m(k)$, die in einem gewissen Gebiete ein negatives Vorzeichen besitzen. Falls das Längsfeld gleich Null ist, liegt dieser Zweig bei $m=0$ und $m=1$ vollständig im negativen Gebiet, wobei für $k\ll 1$

$$\begin{aligned} &\omega_0^2=-\frac{k^2c^2}{\gamma-1}\quad(\gamma\neq 1),\qquad \omega_0^2=-2\sqrt{(2)}\,\frac{kc^2}{a}\quad(\gamma=1), \\ &\omega_1^2=-\frac{2}{\gamma}\,k^2c^2\ln\frac{1}{k}. \end{aligned} \tag{12}$$

Für $m \geqslant 2$ ist dieser Zweig im Gebiete von kleinen k positiv; bei einem Werte von $k = K_m$, der von der Gleichung $kK_{m-1}/K_m + m - m^2 = 0$ bestimmt wird, geht er in das negative Gebiet über. Diese Werte von K_m sind die folgenden: $K_2 = 3$, $K_3 = 8$, $K_4 = 14$, ..., $K_m = m^2$ $(m \gg 1)$. Im Gebiete von kurzwelligen Störungen haben alle Abzweigungen von $\omega_m^2(k)$ eine Assymptotik

$$k \to \infty \quad \omega_m^2(k) \to -\frac{2}{\gamma} \frac{kc^2}{a}. \tag{13}$$

In Anwesenheit eines Längsfeldes geht dieser Zweig bei grossen k in das positive Gebiet über. Das Stabilitätskriterium erhalten wir aus der Forderung, dass die Dispersionsgleichung (11) keine Lösung $\omega^2 < 0$ haben soll. Bei negativen ω^2 wächst der linke Teil der Gleichung monoton von $\omega^2 = 0$ bis $\omega^2 = -\infty$, während der rechte Teil abnimmt. Eine Lösung $\omega^2 < 0$ fehlt folglich, wenn $f(0) < 0$, oder wenn

$$k^2 h_i^2 + (kh_e + m)^2 \frac{k \dfrac{I_{m-1}(k)}{I_m(k)} - m}{k \dfrac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m} > k \frac{I_{m-1}(k)}{I_m(k)} - m \text{ ist.} \tag{14}$$

Hierzu gehörende Kombinationen

$$\phi_1(k_1 m) = k \frac{I_{m-1}(k)}{I_m(k)} - m, \quad \phi_e(k_1 m) = k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m \tag{15}$$

sind vom Vorzeichen des m nicht abhängig, während der Faktor $(kh_e + m)^2$ bei der gegebenen Störungsform wesentlich vom Vorzeichen des m/kh_e abhängt. Bei der Bestimmung des Stabilitätskriteriums muss man beiden Vorzeichen Rechnung tragen. Der Bestimmtheit wegen nehmen wir weiter $k > 0$ und $m > 0$ an.

Wollen wir die folgenden Sonderfälle beachten:

(1) $H_\phi^0 = 0$. Das Gleichgewicht ist immer stabil, weil (14) in

$$\phi_2(k_1 m)\, H_{ei}^2 + \phi_1(k_1 m)\, H_{ze}^2 > 0 \quad (\phi_2 > 0,\ \phi_1 > 0)$$

übergeht.

(2) $H_{ze}^0 = h_e = 0$. Das Stabilitätskriterium für $m = 0$ ist $h_1^2 > \dfrac{I_1(k)}{kI_0(k)}$. Für $m = 2, 3, \ldots$ wird ein kleinerer Wert von h_i notwendig sein. Der Maximalwert des rechten Teiles der letzten Ungleichheit ist gleich mit 0·5. Folglich ist das Gleichgewicht bei $H_{zi}^0 > \dfrac{\sqrt{2}\, I}{ca}$ für Störungen mit $m \neq 1$ stabil. Für $m = 1$ wächst das für eine Stabilität notwendige Längsfeld mit $k \to 0$ logarithmisch. Inwieweit $h < 1$ (3) ist, liegt das Gebiet der Stabilität bei $k > 0{\cdot}46$.

(3) $H_{zi}^0 = h_i = 0$. Die Stabilitätsbedingung ist

$$|h_e| > 1/k[\sqrt{(kK_{m-1}/K_m + m)} \pm m],$$

das Vorzeichen '−' entspricht dem Falle $m/kh_e > 0$, das Vorzeichen '+' dem entgegengesetzten Falle. Da $|h_e|$ mit Anwachsen von m wächst, so sichert das äussere Längsfeld von sich allein die Stabilität nicht. Störungen von einer Wellenlänge $\Lambda \simeq 2\pi a \frac{|h_e|}{m}$ werden vom Felde nicht stabilisiert.

Für einen allgemeinen Fall $h_e \neq 0$, $h_i \neq 0$ und nach der Einführung des Verhältnisses $\epsilon = \left|\frac{h_e}{h_i}\right|$, erhalten wir das Stabilitätskriterium $|h_i| > h_0$;

$$h_0 = \frac{\epsilon m \phi_1 + \sqrt{[\phi_2 + \epsilon^2 \phi_1 - m^2) \, \phi_1 \phi_2]}}{k(\phi_2 + \epsilon^2 \phi_1)}. \tag{16}$$

Die Grenzfälle sind:

$$\underset{m\neq 0}{(k \ll 1)} \quad h_0 = \frac{\epsilon m + \sqrt{[(1+\epsilon^2) \, m - m^2]}}{k(1+\epsilon^2)},$$

$$(k \gg 1) \quad h_0 = \frac{\epsilon m + \sqrt{[(1+\epsilon^2) \, k - m^2]}}{k(1+\epsilon^2)}. \tag{17}$$

Das Stabilitätsgebiet von langwelligen Störungen $k < K_m$ für $m \geqslant 2$ verengt sich bei $1 + \epsilon \geqslant m$ bis auf Null.

Auf den Abb. 1 und 2 liegt das Stabilitätsgebiet zwischen der Abszissenachse und der Kurve $h(k)$.

Wollen wir notieren, dass die Stabilitätsbedingung (14) auf die Forderung hinauskommt, dass die von der Zylinderverschiebung entstehende zusätzliche Kraft F, die seitens des magnetischen Feldes wirkt, gegen die Verschiebungsrichtung wirken soll. Tatsächlich, wie aus den Gleichungen (10) und (11) folgt, ist

$$F = \xi_2 \cdot \frac{H_{\phi e}^{02}}{4\pi a} \frac{f(0)}{\phi_1(k)}.$$

Falls sich der Gaszylinder innerhalb des koaxialen leitenden Zylinders vom Radius b befindet, muss man in der Bedingung (16) $\phi_2(k)$ gegen

$$[\phi_2(k) - \chi(kb) \, \phi_1(k) \, I_m(k)/K_m(k)]/[1 + \chi(kb) \, I_m(k)/K_m(k)]$$

auswechseln, wo

$$\chi(kb) = [kbK_{m-1}(kb) + mK_m(kb)]/[kbI_{m-1}(kb) - mI_m(kb)].$$

Wollen wir uns auf die Untersuchung des Einflusses des koaxialen Zylinders auf die langwelligen Störungen $kb \ll 1$ beim Vorhandensein eines äusseren Längsfeldes ($h_i = 0$) begrenzen. Für $k = 0$ ist die Kraft, die auf den Zylinder seitens des magnetischen Feldes wirkt, gleich:

$$F = -\frac{I^2 \xi_r}{c^2 a} \frac{b^{2m}(m-1)+m+1}{b^{2m}-m}, \quad m \neq 0,$$

$$F = \frac{I^2 \xi_r}{c^2 a}\left(1 - \frac{2h_e^2}{b^2-1}\right), \quad m = 0.$$

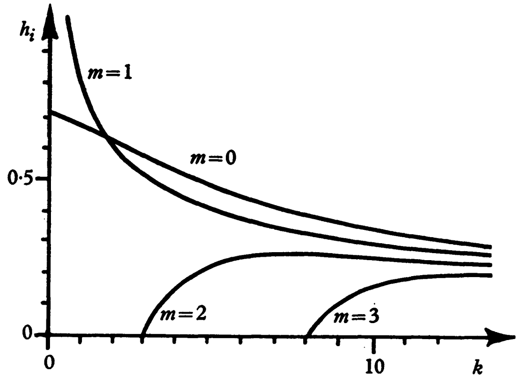

Abb. 1. h_i für verschiedene Werte der Wellenzahl k bei $h_e = 0$. Die Stabilitätsgebiete liegen zwischen der Abszissenachse und den Kurven $h_i(k)$.

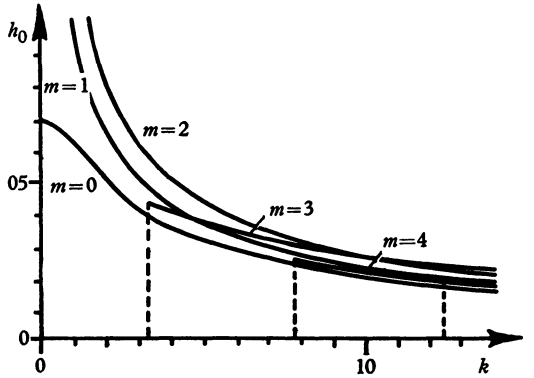

Abb. 2. h_0 für verschiedene Werte von k bei $h_i = h_e = h_0$. Die Stabilitätsgebiete wie in Abb. 1.

Die Stabilitätsbedingung ist $F/\xi_2 < 0$. Es ist ersichtlich, dass das magnetische Feld zwischen den Zylindern die Störungen bei $m = 0 \cdot 1$ dämpft.

Zum Schluss danke ich den Akademikern M. A. Leontowitsch und S. I. Braginsky für wertvolle Anweisungen.

LITERATUR

[1] Kruskal, M. und Schwarzschild, M. *Proc. Roy. Soc.* A, **223**, 348, 1954.