TARIFICATION DU RISQUE INDIVIDUEL D'ACCIDENTS D'AUTOMOBILES PAR LA PRIME MODELEE SUR LE RISQUE

PIERRE J. DELAPORTE
Paris, France

Le principe de l'assurance contre les accidents d'automobiles est la formation d'une mutualité où les assurés mettent en commun leurs risques. Si les risques des assurés ne sont pas tous égaux entre eux, il est normal de demander à chacun des assurés une prime proportionnelle au risque qu'il fait supporter à la mutualité. La tarification a pour objet l'estimation du risque propre à chaque assuré, afin de répartir équitablement la charge totale de la mutualité.

On groupe habituellement les véhicules ayant en commun plusieurs caractéristiques du risque telles que même modèle de voiture, même usage, même lieu de garage habituel. Nous désignerons un tel groupement par classe de tarif.

ESTIMATION DU RISQUE MOYEN : TARIFICATION À LA PRIME MOYENNE

On observe les accidents relatifs aux véhicules appartenant à une même classe de tarif. Le quotient du coût de ces accidents au nombre de voitures-année donne la prime moyenne pure empirique. Cette prime moyenne subit alors quelques corrections pour tenir compte de la survenance au hasard des gros sinistres et du fait que la prime à indiquer dans le tarif estime le risque moyen futur et non pas le risque passé. Cette prime moyenne sera demandée à toutes les voitures ayant les caractéristiques définies par la classe de tarif; elle suppose que tous les risques de cette classe sont égaux, c'est-à-dire que les seuls paramètres de tarification retenus sont exhaustifs pour caractériser le risque que l'assuré fera supporter à la mutualité.

Cependant, les compagnies d'assurances qui utilisent des tarifications à la prime moyenne ont l'habitude de gérer les polices de leur portefeuille en niant cette égalité des risques:

a - *par la Surveillance du Portefeuille.*

Les assureurs ont l'habitude d'examiner soit les rapports du

https://doi.org/10.1017/S051503610001059X Published online by Cambridge University Press

coût des sinistres aux primes, soit les nombres de sinistres déclarés sur chaque police, pour détecter, puis résilier ou majorer la prime future des polices qui ont fait supporter dans le passé les plus lourdes charges à la mutualité.

b - *par des réductions de primes aux bons assurés.*

Souvent les compagnies acceptent de réduire le montant de la prime demandée aux assurés qui ont déclaré peu de sinistres ou bien consentent contractuellement une bonification de prime s'il n'a pas été déclaré d'accident.

Dans les deux cas ci-dessus l'assureur admet:

1°) que les risques individuels appartenant à une même classe de tarif ne sont pas égaux entre eux;

2°) que les risques qui ont été plus lourds ou plus légers dans le passé le resteront aussi dans l'avenir.

Observation des Nombres de Sinistres Déclarés les Années Successives sur un même Véhicule

Dans une même classe de tarif examinons les nombres de sinistres déclarés pour des voitures assurées pendant deux années consécutives. Classons ces voitures selon leur nombre d'accidents de la première année ${}_1s'$ et observons leur fréquence pendant la deuxième année ${}_2s'$.

1er Exemple: Accidents aux tiers de petites voitures utilisées pour les affaires, ayant leur garage habituel à Paris, observées du 1.1.1958 au 31.12.1959

								Ensemble
1958	Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5	2367
1958	Fréquence observée ${}_1s'$	0	1	2	3	4	5	0,590
1959	Fréquence observée ${}_2s'$	0,395	0,717	0,962	1,168	1,278	1,643	0,568
1959	Fréquence estimée $\mathbf{E}\,[{}_2s/{}_1s']$	0,417	0,682	0,947	1,212	1,477	1,742	0,590

La fréquence estimée $\mathbf{E}[{}_2s \mid {}_1s']$ est obtenue au moyen de la formule (**3**) ci-après.

2e Exemple: Accidents aux tiers de voitures Simca 7 CV, usage promenade, garage habituel Paris

https://doi.org/10.1017/S051503610001059X Published online by Cambridge University Press

							Ensemble
1958 Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5	289
1958 Fréquence observée ${}_1s'$	0	1	2	3	4	5	0,326
1959 Fréquence observée ${}_2s'$	0,223	0,404	0,477	0,833	3,000	3,000	0,283
1959 Fréquence estimée $\mathbf{E}\,[{}_2s/{}_1s']$	0,236	0,459	0,682	0,905	1,128	1,351	0,326

3e EXEMPLE: Tous accidents déclarés pendant les 4 premières années sur des voitures sortant d'usine, d'après P. Depoid (voir [1][1], p. 117). Les fréquences estimées sont ici corrigées de la diminution progressive de la fréquence due à ce que les voitures étaient toutes neuves à l'origine et à l'élimination des véhicules les plus accidentés.

1ère année	Nombre d'accidents	0	1	$\geqslant 2$	840
—	Fréquence observée	0	1	2,50	0,671
2e année	Fréquence observée	0,47	0,72	1,06	0,631
—	Fréquence estimée	0,469	0,710	1,066	—
3e année	Fréquence observée	0,39	0,60	0,90	0,517
—	Fréquence estimée	0,384	0,582	0,874	—
4e année	Fréquence observée	0,33	0,45	0,58	0,386
—	Fréquence estimée	0,287	0,434	0,652	—

On observe ainsi que le classement des voitures selon les nombres croissants d'accidents qu'elles ont eus la première année donne des fréquences croissantes d'accidents les années suivantes.

MODÈLE REPRÉSENTANT LA SURVENANCE DES ACCIDENTS DES VOITURES D'UNE MÊME CLASSE DU TARIF

Désignons par:

s_i la variable aléatoire nombre de sinistres d'une voiture déterminée i pendant une durée unitaire (pour simplifier nous prendrons une année). s_i est donc le risque d'accident d'une voiture i.

${}_1s'_i, {}_2s'_i, \ldots {}_ls'_i$ les nombres observés de sinistres de cette voiture i pendant la 1ère, la 2e, ... la l ème année étudiée.

$F(s)$ la fonction de répartition des variables s_i des voitures de la classe étudiée du tarif.

$P({}_js'_i/s_i)$ la probabilité pour qu'une voiture de risque s_i ait ${}_js'_i$ accidents au cours de la j ème année.

Nous avons montré (voir [3], p. 122) que l'ensemble des résultats statistiques précédents pouvait être représenté par un modèle où

[1]) Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie à la fin de l'article.

la probabilité, qu'une voiture prise au hasard dans la classe ait s' accidents la première année, est

$$P(s') = \int_{s_0}^{+\infty} \mathrm{P}(s' \mid s).\, dF(s) \tag{1}$$

où s_0 est le risque minimum d'une voiture.

On a montré (voir [4], p. 88 à 90) que la probabilité $\mathrm{P}({}_js'_i \mid s_i)$ était donnée par la loi de Poisson

$$\mathrm{P}({}_js'_i \mid s_i) = e^{-s_i} \frac{s_i^{\,{}_js'_i}}{{}_js'_i!} \tag{2}$$

La fonction de répartition $F(s)$ peut présenter diverses formes analytiques selon la clientèle du modèle de véhicule, la sélection des risques faite par la compagnie d'assurances à la souscription et par la surveillance du portefeuille. On a donné une méthode générale de détermination de cette forme analytique par les Types de K. Pearson (voir [3], formules 1, 2 et 6).

Ce modèle permet une représentation statistiquement satisfaisante:

1º) des nombres de sinistres observés sur l'ensemble des véhicules d'une classe (voir [3], p. 127 et 128; [4], tableau 1);

2º) des nombres de sinistres d'une année pour chaque voiture, connaissant les nombres de sinistres des années antérieures. En effet, si l'on suppose le risque s_i de chaque voiture stable au cours du temps [1]) le nombre probable des sinistres de 2e année est l'espérance mathématique de s liée par le nombre d'accidents observé la 1ère année

$$\mathbf{E}\left[{}_2s_i \mid {}_1s'_i\right] = \frac{\int_{s_0}^{+\infty} s \,.\, \mathrm{P}({}_1s' \mid s).\, dF(s)}{\int_{s_0}^{+\infty} P({}_1s' \mid s).\, dF(s)} \tag{3}$$

---

[1]) On a montré ([6] application des formules Nos 6 et 7) que, d'après les observations des nombres de sinistres de 2 années consécutives, les modifications au cours du temps du risque des voitures d'une classe étaient statistiquement négligeables.

Ces espérances mathématiques liées sont indiquées comme „fréquence estimée" dans chacun des 3 exemples ci-dessus. L'action de la Surveillance du Portefeuille qui résilie les polices ayant des nombres de sinistres élevés a pour effet de diminuer progressivement les fréquences moyennes observées dans les statistiques des compagnies d'assurances.

On a montré (voir [6], formules 2 et 5) que, d'après les statistiques des voitures assurées par l'Urbaine et la Seine [1]), la distribution des risques individuels a le plus souvent pour forme la probabilité élémentaire:

$$dF(s) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} \cdot e^{-a(s-s_0)} \cdot (s - s_0)^{b-1} \cdot ds \tag{4}$$

où $\Gamma(b)$ est l'intégrale eulerienne complète de seconde espèce et s_0 (risque minimum), a et b sont des paramètres propres à la classe du tarif. On a indiqué une méthode générale d'estimation de ces paramètres par le maximum de vraisemblance ([6] formule 5).

Les courbes de distribution des risques ([6] fig. 1 et 2) données pour divers modèles de véhicules montrent que, pour un même lieu de garage et un même usage, les risques individuels varient très fortement et que leur aire commune est très importante: 66 % en Province (zone Normale) et 78 % à Paris, alors que les puissances SAE de ces voitures varient de 12 à 75 CV. Les risques individuels petits et moyens sont à peu près les mêmes pour tous les types de véhicules qui se différencient surtout par les plus gros risques individuels dont les fréquences sont beaucoup plus élevées pour les voitures de fortes puissances. Ceci explique que le risque moyen soit différencié selon les types de véhicules, alors que les risques individuels ont des distributions peu différenciées. Les différences entre les risques proviennent pour la plus grande part de la clientèle qui choisit le véhicule et non pas des différences qui existent entre les divers modèles de véhicules. Ceci explique de légères différences entre les risques moyens des diverses classes de tarif, alors que la différenciation est surtout très forte entre les risques individuels à l'intérieur d'une classe. C'est dire que le risque mis en mutualité varie beaucoup plus avec l'assuré qu'avec les caractéristiques

[1]) Nous remercions vivement M. A. Pla, M. J. Mouillard et Melle G. Chardon de l'aide qu'ils nous ont apportée pour cette étude.

générales de la classe. La prime qu'il est équitable de demander à chaque assuré doit donc varier avec les caractéristiques générales de la classe mais surtout avec les caractéristiques individuelles du risque.

ESTIMATION PROGRESSIVE DU RISQUE INDIVIDUEL

La tarification des risques devrait se faire d'après la valeur s_i du risque de l'assuré i. Ceci n'est pas possible puisque le risque s_i est nécessairement inconnu, mais, cependant, il peut être estimé. L'assureur devra donc, à chaque instant, prendre pour base de la prime du risque s_i la meilleure estimation qu'il peut en faire. Ceci entraîne pour l'assureur une suite d'estimations successives faites pour chaque risque i au début de chaque année d'assurance.

Soit $F(s)$ la fonction de répartition des risques individuels d'une classe du tarif. La somme des probabilités des risques individuels est $\int_{s_0}^{+\infty} d\,F(s) = 1$.

Après une année d'observation des risques, les probabilités d'une valeur de s_i ne sont pas les mêmes si le risque n'a eu aucun sinistre, a eu 1 sinistre, a eu 2 sinistres, etc. Ces probabilités sont données par les distributions liées suivantes, telles que la somme des aires de l'ensemble de ces distributions soit égale à 1.

La probabilité élémentaire de s_i s'il n'est survenu aucun sinistre pendant la 1ère année est:

$$P\,(0\,|\,s)\,.\,dF(s) = e^{-s}\,.\,dF\,(s) \tag{5}$$

s'il est survenu 1 sinistre:

$$P\,(1\,|\,s)\,.\,dF(s) = s.\,e^{-s}\,.\,dF(s) \tag{6}$$

s'il est survenu ${}_1s'$ sinistres:

$$P\,({}_1s'\,|\,s)\,.\,dF(s) = \frac{s^{({}_1s')}}{{}_1s'\,!}.\,e^{-s}.\,dF(s) \tag{7}$$

D'une manière analogue on écrira les probabilités élémentaires de s_i sachant que le nombre total de sinistres déclarés pendant les 2 premières années sur la voiture i est ${}_2s_i$:

$$\sum_{{}_1s'_i + {}_2s'_i = {}_2s_i} P\,({}_1s'_i\,|\,s).\;P\,({}_2s'_i\,|\,s).\,dF(s) = \frac{s^{{}_1s'_i + {}_2s'_i}}{({}_1s'_i + {}_2s'_i)\,!}.\,e^{-2s}\,.\,dF(s) \tag{8}$$

https://doi.org/10.1017/S051503610001059X Published online by Cambridge University Press

D'une manière générale la probabilité élémentaire de s_i sachant que le nombre total de sinistres déclarés pendant les k premières années sur la voiture i est ${}_ks_i$:

$$\sum_{{}_1s'_i + \ldots + {}_ks'_i = {}_ks_i} P({}_1s'_i | s) . P({}_2s'_i | s) \ldots P({}_ks'_i | s) . dF(s) =$$

$$= \frac{s^{{}_1s'_i + \ldots + {}_ks_i}}{({}_1s'_i + \ldots + {}_ks'_i)!} . e^{-ks} . dF(s) \tag{9}$$

Exemple 3 — Assurance de responsabilité civile des voitures de la classe de tarif: voitures Renault—modèle Dauphine, usage: Affaires, lieu de garage habituel Paris, en 1958-1959.

L'étude des sinistres déclarés donne une probabilité élémentaire de la forme (4) dont les paramètres, estimés par la méthode du maximum de vraisemblance, sont $a = 3{,}862$ $b = 1{,}600$ et $s_0 = 0$.

Sur la figure No. 1, on a représenté:

en pointillé:	la courbe de densité de probabilité des risques s_i
en trait continu:	les courbes de densité de probabilité des risques s_i sachant qu'il a été déclaré 0 sinistre, ou 1 sinistre, ou 2 sinistres, pendant la 1ère année.
en tirets:	les courbes de densité de probabilité des risques s_i sachant qu'il a été déclaré 0 sinistre, ou 1 sinistre, ou 2 sinistres, pendant l'ensemble des 2 premières années.

On voit immédiatement que les courbes de densité de probabilité sont très différentes les unes des autres dès que l'on connaît les sinistres de la 1ère année, a fortiori lorsqu'on connaît les sinistres des 2 premières années.

Exemple 4 — Assurance de responsabilité civile et de dommages à la voiture pour la classe de tarif: voiture Peugeot, modèle 403, usage: commerce, lieu de garage habituel: villes de moyenne importance (zones 3-4) en 1958-1959. Les diverses courbes des densités de probabilité indiquées ci-dessus sont représentées sur la figure No. 2.

On peut proposer deux méthodes d'estimation progressive du risque individuel d'accident d'après les distributions liées indiquées dans les formules (5) à (9).

Densité de probabilité des risques s_i à l'origine et densités de probabilité liées par les sinistres de la première année ou des 2 premières années

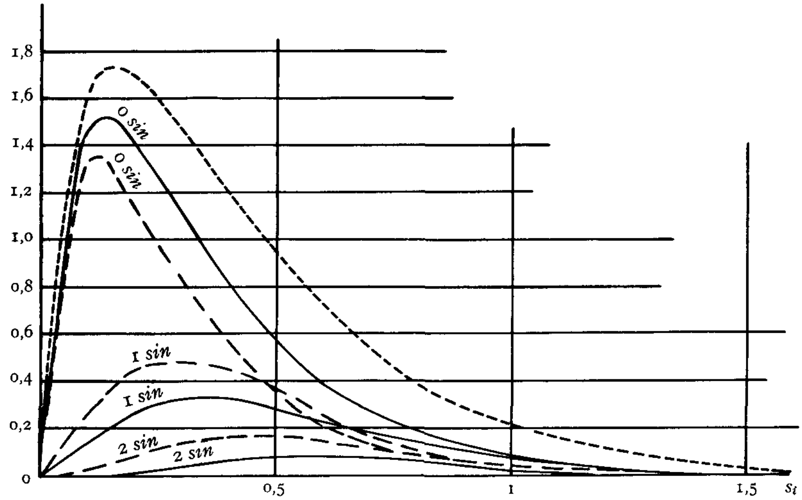

Fig. 1

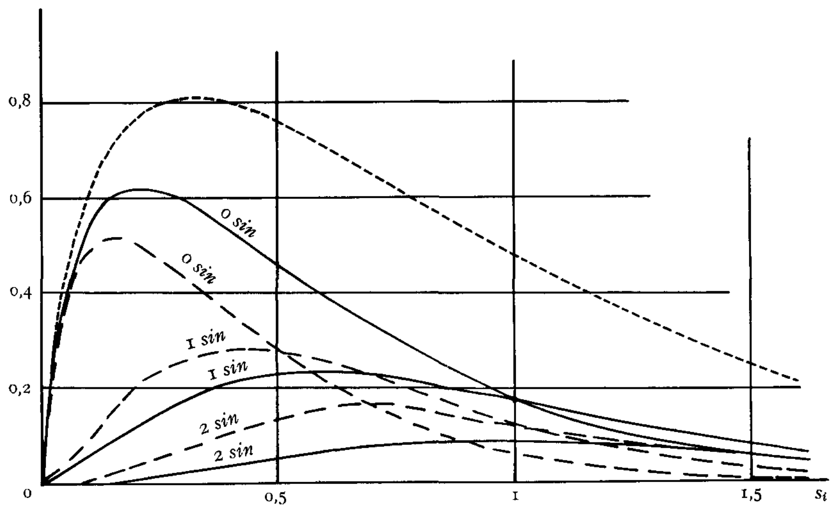

Fig. 2

1°) *Estimation du risque individuel par le risque le plus probable,* c'est-à-dire par la dominante des distributions liées. Cette hiérarchisation des gravités des risques est celle que désirerait l'assuré.

https://doi.org/10.1017/S051503610001059X Published online by Cambridge University Press

L'étude qui en a été faite [5] a montré qu'elle fournit une solution intéressante pour l'estimation progressive d'un risque, mais qu'elle ne peut servir de base à une tarification de l'assurance automobile sans une modification importante des habitudes actuelles.

2°) *Estimation du risque individuel par le risque probable.*

Sous le nom de „*Prime modelée sur le risque*" on a déjà étudié [4] l'efficacité de cette méthode de tarification de l'assurance automobile. Dans cette méthode, on estime chaque année le risque individuel par son espérance mathématique liée par l'information déjà connue.

A la souscription de la police, l'estimation de la prime de première année, appelée encore prime initiale, se fait d'après l'espérance mathématique de la classe de tarif, c'est-à-dire par

$$\mathbf{E}\,[{}_1s'_i] = \int_0^{+\infty} s\,.\,dF(s) \tag{10}$$

La prime de 2e année s'obtient au début de la 2e année d'après l'espérance mathématique de la fréquence s_i, sachant que la voiture i appartient à la classe de tarif et qu'il a été déclaré ${}_1s'_i$ sinistres pendant la 1ère année. Cette espérance mathématique liée est donnée par la formule (3).

L'estimation des primes des années suivantes se fait d'une manière analogue. En général, l'estimation de la prime de la $(k+1)^{\text{ème}}$ année d'assurance se fait d'après l'espérance mathématique du risque s_i liée par les nombres ${}_1s'_i$, ${}_2s'_i$, $\ldots$ ${}_ks'_i$ de sinistres déclarés pendants les k premières années d'assurance.

$$\mathbf{E}\left[{}_{k+1}s'_i \middle| {}_1s'_i, {}_2s'_i, \ldots {}_ks'_i\right] = \frac{\int_0^{+\infty} s.P({}_1s'\,|\,s).P({}_2s'\,|\,s)\ldots P({}_ks'\,|\,s).dF(s)}{\int_0^{+\infty} P({}_1s'\,|\,s).P({}_2s'\,|\,s)\ldots P({}_ks'\,|\,s).\,dF(s)} =$$

$$= \frac{\int_0^{+\infty} s^{{}_1s'_i+\ldots+{}_ks'_i+1}\,.\,e^{-ks}\,.\,dF(s)}{\int_0^{+\infty} s^{{}_1s'_i+\ldots+{}_ks'_i}\,.\,e^{-ks}\,.\,dF(s)} \tag{11}$$

En désignant par c le coût moyen des sinistres de la classe de tarif et par g le taux de frais généraux (y compris commissions et chargement de sécurité), la prime commerciale modelée sur le risque de la voiture i pour la $(k + 1)^{\text{ème}}$ année est donnée par

$$_{k+1}\Pi_i = \frac{c.\mathbf{E}[_{k+1}s'_i \mid {_1s'_i}, {_2s'_i}, \ldots {_ks'_i}]}{1-g} \tag{12}$$

La tarification par prime modelée sur le risque a les principales propriétés suivantes [5]:

Propriété 1

Chaque année, la somme des primes perçues est égale à la somme des coûts des sinistres et des frais généraux.

Propriété 2

La prime modelée sur le risque, demandée à un véhicule i, pour l'année $k + 1$, est toujours égale à son espérance mathématique individuelle.

Il en résulte que:

a) le départ d'un risque i quelconque ne lèse pas l'équilibre du portefeuille de la compagnie puisque chacun et l'ensemble des risques restants sont encore tarifés à leur espérance mathématique;

b) l'assureur qui, par concurrence, propose au risque i une prime inférieure à la prime modelée sur le risque travaille en-dessous de l'espérance mathématique du risque. L'espérance mathématique de son gain est donc négative et, en répétant de nombreuses fois cette opération, il subira nécessairement une perte importante.

Propriété 3

Si le risque est stable au cours du temps quand la durée d'assurance k croît, *la prime modelée $_{k+1}\Pi_i$ sur le risque i tend asymptotiquement vers celle de la vraie valeur s_i initialement inconnue et cette asymptote est indépendante de la distribution initiale $F(s)$ des risques de la classe du tarif.* Autrement dit, la prime asymptotique d'un risque i est indépendante des erreurs de la classification initiale de ce risque, c'est-à-dire indépendante du tarif initial.

Sur les figures 3 et 4 on a indiqué, pour les exemples 3 et 4 ci-dessus respectivement, quelques courbes d'espérance mathématique du cheminement. Pour cela on a pris pour échelle des ordonnées la valeur du risque, sur le graphique de gauche: valeur vraie du risque individuel, sur le graphique de droite: espérance mathématique liée de s_i utilisée pour la prime modelée sur le risque, et pour échelle des abscisses; graphique de gauche: la densité de probabilité des risques individuels s_i; graphique de droite: les années successives t d'estimation de chaque risque individuel i.

Distribution des risques individuels et espérances mathématiques du cheminement de l'estimation du risque individuel chaque année

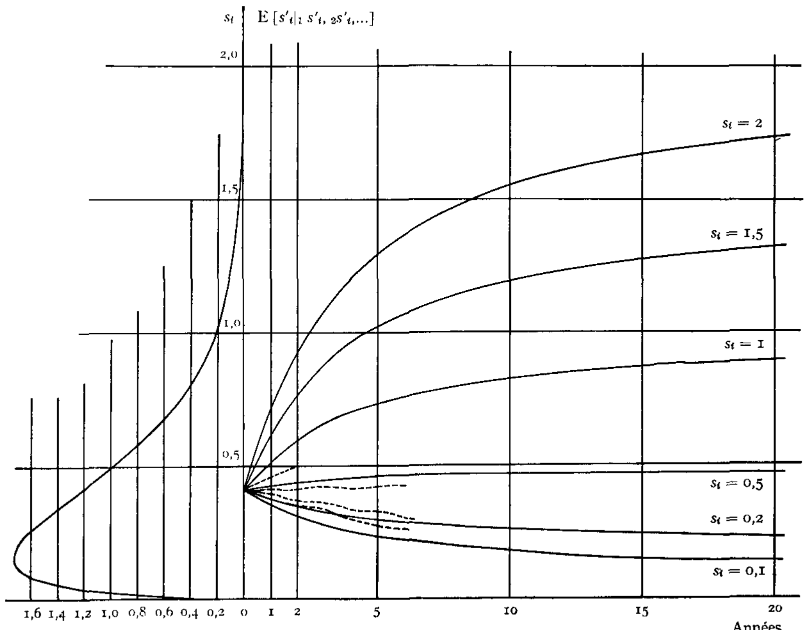

Fig. 3

Le graphique de gauche fait apparaître la fréquence avec laquelle chacune des gravités de risque individuel s_i existe dans le portefeuille de la compagnie d'assurances.

Sur le graphique de droite, on a indiqué en trait continu, pour quelques valeurs du risque individuel s_i = 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0, les courbes donnant les espérances mathématiques des risques (correspondant à la prime modelée qu'aurait à payer la 1$^{\text{ère}}$ année, la 2e année, etc. chacun de ces risques).

On voit immédiatement sur les figures 3 et 4 que, dès les premières années, la différenciation entre les risques individuels est très forte et qu'à partir de la 8e ou de la 10e année, la courbe d'espérance mathématique du cheminement est voisine de la valeur vraie du risque, qui est son asymptote.

Distribution des risques individuels et espérances mathématiques du cheminement de l'estimation du risque individuel chaque année

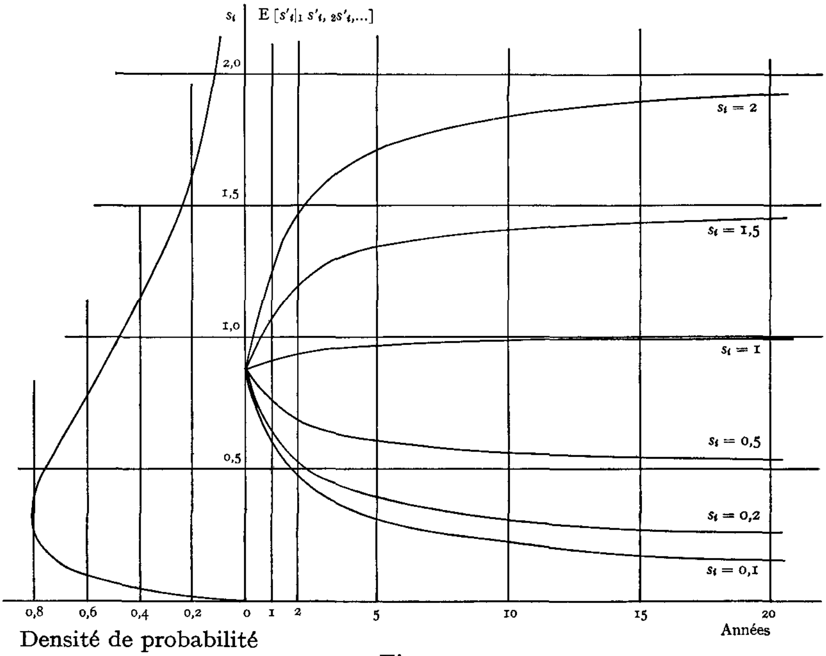

Fig. 4

Propriété 4

Pour chaque classe de risques, la tarification par la prime modelée a une efficacité maximum.

En effet, désignons par ${}_k\lambda_i$ l'estimation du risque individuel i prise par le tarif d'assurances pour l'année k. La variance des sinistres par rapport au tarif est:

$$
{}_k\zeta_i = \int_0^{+\infty} ({}_k s'_i - {}_k\lambda_i)^2 \,.\, P({}_1 s'_i \,|\, s_i) \,.\, P({}_2 s'_i \,|\, s_i) \ldots P({}_{k-1} s'_i \,|\, s_i) .\, dF(s) =
$$

$$
= \mathbf{E}\,[{}_k s'^2_i \,|\, {}_1 s'_i, \ldots {}_{k-1} s'_i] - 2\,{}_k\lambda_i .\, \mathbf{E}\,[{}_k s'_i \,|\, {}_1 s'_i, \ldots {}_{k-1} s'_i] + \lambda_i^2 \quad (13)
$$

https://doi.org/10.1017/S051503610001059X Published online by Cambridge University Press

cette variance est minimum pour:

$$\frac{\partial_k \zeta_i}{\partial_k \lambda_i} = -2\,\mathbf{E}\left[{}_k s'_i \mid {}_1 s'_i, \ldots {}_{k-1} s'_i\right] + 2{}_k\lambda_i = 0$$

donc pour $${}_k\lambda_i = \mathbf{E}\,[{}_k s'_i \mid {}_1 s'_i, \ldots {}_{k-1} s'_i] \qquad (14)$$

La variance est donc minimum lorsque le tarif prend pour estimation du risque l'espérance mathématique du risque liée par les antécédents, c'est-à-dire pour la tarification par la prime modelée sur le risque.

Il résulte de ceci que toutes les autres méthodes de tarification des risques d'une classe sont moins efficaces que la Prime Modelée, en particulier la prime du risque moyen, les bonifications pour petits nombres de sinistres, etc.

Efficacité de la prime moyenne par rapport à la prime modelée pour la $k^{ème}$ année d'assurance, pour une classe du tarif

Désignons par ${}_k\mathbf{V}$ la variance des sinistres de la $k^{\text{ème}}$ année par rapport à l'espérance mathématique liée par les sinistres des k-1 années antérieures

$${}_k\mathbf{V} = \int_{s_0}^{+\infty} \sum_{{}_1s'=0}^{\infty} \sum_{{}_2s'=0}^{\infty} \ldots \sum_{{}_ks'=0}^{\infty} \{{}_k s' - \mathbf{E}\,[{}_k s' \mid {}_1 s', {}_2 s', \ldots {}_{k-1} s']\}^2 .$$
$$P\,({}_1 s' \mid s) \ldots P\,({}_k s' \mid s)\,.\,dF(s) \qquad (15)$$

alors ${}_\infty\mathbf{V}$ est la variance due à la survenance au hasard des sinistres d'une année si l'on connaît exactement chacun des risques individuels s_i;

${}_1\mathbf{V}$ est la variance de première année qui est la même si l'on utilise la prime moyenne ou la prime modelée.

Donc, à l'intérieur d'une classe de tarif, l'efficacité de la tarification à la prime moyenne par rapport à la tarification à la prime modelée est

$${}_k e = \frac{{}_k\mathbf{V} - {}_\infty\mathbf{V}}{{}_1\mathbf{V} - {}_\infty\mathbf{V}} \qquad (16)$$

La figure 5 représente la variation de cette efficacité pour le troisième exemple (Renault, Dauphine) et pour le 4e exemple (Peugeot 403). Ces courbes montrent que l'efficacité de la tarification

https://doi.org/10.1017/S051503610001059X Published online by Cambridge University Press

par la prime moyenne devient mauvaise dès les premières années et qu'elle est d'autant plus mauvaise que le risque moyen est plus élevé. Dans tous les cas, l'efficacité tend asymptotiquement vers zéro quand la durée d'observation augmente.

Efficacité globale de la prime moyenne par rapport à la prime modelée pour l'ensemble des k premières années d'assurance

L'efficacité des tarifications peut aussi être examinée pour l'ensemble des primes perçues de la première à la $k^{\text{ème}}$ année. Ceci correspond à l'efficacité que réalise une compagnie d'assurance qui applique ces méthodes de tarification aux polices de son portefeuille; c'est aussi la manière dont un assuré a cotisé à la mutualité pendant l'ensemble des k premières années d'assurance, selon le mode de tarification qui lui est appliqué. Pour obtenir cette efficacité globale, désignons par: $\sum\limits_{_js'}$ une somme Σ étendue de $_js' = 0$ à $_js' = +\infty$

$_j\Theta$ l'espérance mathématique liée correspondant à la prime modelée sur le risque

$$_j\Theta = \mathbf{E}\left[_js' \mid {}_1s', {}_2s', \ldots {}_{j-1}s'\right]$$

$$_k\mathbf{V}' = \int_{s_0}^{+\infty} \sum_{_1s'} \sum_{_2s'} \ldots \sum_{_ks'} \{_1s' + \ldots + {}_ks' - (_1\Theta + \ldots + {}_k\Theta)\}^2 .$$
$$.P\,(_1s' \mid s) \ldots P\,(_ks' \mid s)\,.dF(s) = \sum_{j=1}^{k} {}_j\mathbf{V} \tag{17}$$

la variance des sinistres autour de la prime modelée (ce résultat très simple provient de l'utilisation des espérances mathématiques liées successives).

$$_k\mathbf{V}'' = \int_{s_0}^{+\infty} \sum_{_1s'} \sum_{_2s'} \ldots \sum_{_ks'} (_1s' + {}_2s' + \ldots + {}_ks' - ks)^2 .$$
$$.P\,(_1s' \mid s) \ldots P\,(_ks' \mid s)\,.dF(s) \tag{18}$$

la variance des sinistres autour du risque moyen.

L'efficacité globale est alors

$$_ke' = \frac{_k\mathbf{V}' - {}_\infty\mathbf{V}'}{_k\mathbf{V}'' - {}_\infty\mathbf{V}'} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} {}_j\mathbf{V} - k.{}_\infty\mathbf{V}}{_k\mathbf{V}'' - k.{}_\infty\mathbf{V}} \tag{19}$$

https://doi.org/10.1017/S051503610001059X Published online by Cambridge University Press

Efficacité de la tarification à la prime moyenne par rapport à la tarification par prime modelée

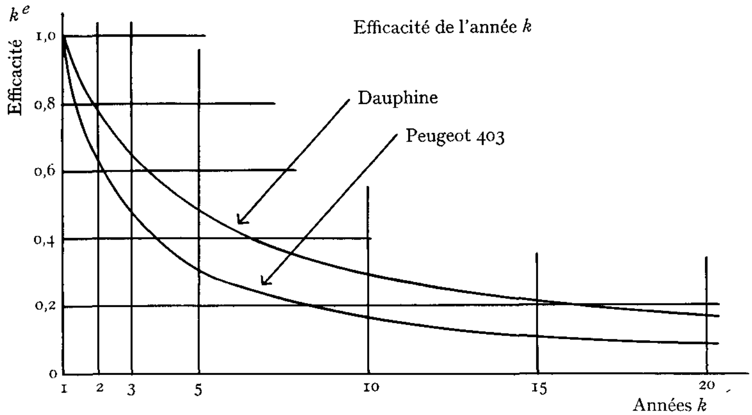

Fig. 5

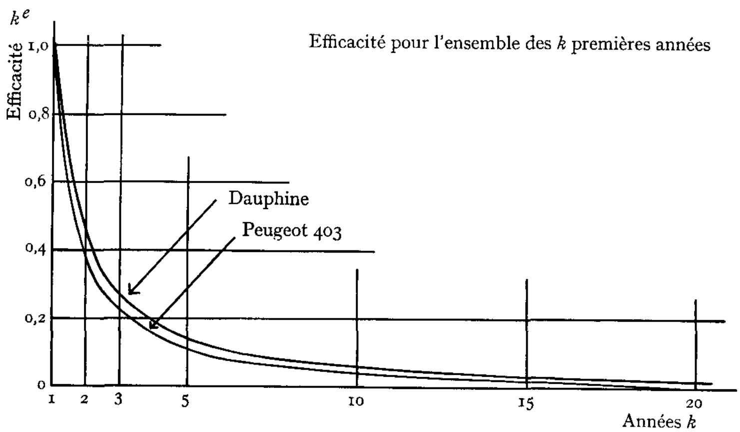

Fig. 6

Les courbes d'efficacité globale, de la tarification à la prime moyenne par rapport à la tarification par la prime modelée, sont données sur la figure No 6 pour les exemples 3 et 4. Dans chaque cas, l'efficacité globale de la prime moyenne tend vers zéro quand le nombre d'années d'assurance croît. Pour 5 et pour 10 ans d'assurance respectivement, on a une efficacité de la prime moyenne par rapport à la prime modelée, de 14,0 % et 5,3 % pour la Dauphine, de 11,2 % et 3,8 % pour la Peugeot 403.

https://doi.org/10.1017/S051503610001059X Published online by Cambridge University Press

PRÉSENTATION D'UN TARIF À PRIME MODELÉE SUR LE RISQUE

Quelques aménagements de ces principes généraux devront être faits pour la présentation commerciale d'un tarif à prime modelée sur le risque:

1°) on simplifiera la présentation en exprimant dans la police le seul montant de la prime initiale ${}_1\Pi_i$ et un tableau des coefficients multiplicateurs K de la prime initiale permettant d'exprimer la prime de l'année $l + 1$ en fonction de la prime initiale et du nombre total de sinistres déclarés pendant les l premières années.

Ce multiplicateur K est une fonction $K(S'|l)$ du nombre total de sinistres observés en l années $S' = {}_1s'_i + {}_2s'_i + \ldots + {}_ls'_i$, mais il est indépendant de la répartition de ces s' sinistres entre chacune des l années.

$$K = \frac{E\,[{}_{l+1}s'_i\,|\,{}_1s'_i,\,{}_2s'_i,\,\ldots\,{}_ls'_i]}{E\,[{}_1s'_i]} \tag{20}$$

Voici à titre d'exemple ces multiplicateurs de correction pour l'assurance de responsabilité civile d'une voiture 5 CV Renault, modèle Dauphine, usage Affaires, ayant Paris pour lieu de garage habituel: (exemple No. 3 ci-dessus)

BARÈME 1

Nombre de sinistres avec règlement	Nombre d'années d'observation								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0,794	0,659	0,563	0,491	0,436	0,392	0,356	0,326
1		1,291	1,071	0,915	0,798	0,708	0,636	0,578	0,529
2		1,787	1,482	1,266	1,105	0,981	0,881	0,800	0,733
3		2,284	1,894	1,618	1,412	1,253	1,126	1,022	0,936
4		2,780	2,306	1,970	1,719	1,525	1,371	1,244	1,140
5		3,277	2,718	2,322	2,026	1,798	1,615	1,467	1,343
6		3,773	3,129	2,673	2,333	2,070	1,860	1,689	1,546
7		4,270	3,541	3,025	2,640	2,342	2,105	1,911	1,749
8			3,953	3,377	2,947	2,615	2,350	2,133	1,953
9			4,365	3,729	3,254	2,887	2,595	2,355	2,156
10				4,080	3,561	3,160	2,839	2,578	2,360

2°) on arrondira les valeurs des coefficients K à des multiples de 5 % afin de diminuer le nombre de valeurs distinctes que peut prendre la prime.

3°) on maintiendra, autant qu'il est possible, le coefficient K à une valeur inférieure ou égale à 1 et on supposera que pour les valeurs $K > \theta$, θ étant une limite donnée qui dépend des tarifications des assureurs concurrents, les assurés quitteront la compagnie. Les valeurs de K inférieures à 1 dans le barème 1 devront alors être majorées de telle sorte que l'espérance mathématique de l'ensemble des nouvelles valeurs K' des coefficients K, multipliée chacune par Λ (K') probabilité d'encaissement de la prime, soit au plus égale à l'espérance mathématique des risques conservés. Si s' désigne le nombre de sinistres déclarés en l années et $G(s'|l)$ la probabilité d'observer s' sinistres en l années, les K' doivent remplir chaque année la condition:

$$\sum_{s'=0}^{\infty} K'.G(s'\,|\,l).\Lambda(K') \geqslant \sum_{s'=0}^{\infty} K.G(s'\,|\,l).\Lambda(K') \qquad (21)$$

Le barème 2 a été établi sous cette condition (21) avec $\Lambda(K') = 1$ si $K' < 1{,}3$ et $\Lambda(K') = 0$ si $K' \geqslant 1{,}3$. D'autre part on a limité supérieurement à 2 les valeurs de K' à faire figurer sur la police, afin d'éviter d'alarmer inutilement l'assuré.

BARÈME 2

Nombre de sinistres avec règlement	Nombre d'années d'observation						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0,90	0,80	0,75	0,6	0,55	0,45
1		1	1	0,95	0,85	0,8	0,7
2		1,60	1,30	1,2	1	1	0,9
3		2	1,80	1,5	1,4	1,2	1
4		2	2	2	1,7	1,5	1,3
5		—	—	—	2	1,8	1,6
6		—	—	—	—	2	1,8
7		—	—	—	—	—	2

L'espérance mathématique du cheminement de la prime relative à ce barème 2 a été indiquée en traits pointillés sur la figure No. 3 pour les valeurs du risque individuel $s_i = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}5$ et 1. On voit immédiatement sur ce graphique l'importance de la perte de discrimination, entre les risques, que l'on accepte pour des motifs commerciaux.

https://doi.org/10.1017/S051503610001059X Published online by Cambridge University Press

4°) on a analysé le fonctionnement d'un marché en régime de libre concurrence où une ou plusieurs compagnies *W* pratiquent la tarification à prime modelée sur le risque et les autres la tarification à prime moyenne (voir [5], 2e cas). On a observé que les compagnies *W* pourraient éprouver des difficultés pour réaliser des contrats nouveaux, si leur prix de revient de 1ère année est supérieur à la prime demandée par la plupart des autres assureurs.

Les compagnies *W* devront alors utiliser en première année une prime inférieure à leur prix de revient, mais adopter une stratégie de modification de la prime des années suivantes qui réponde à la double condition:

— l'insuffisance des primes de première année doit être amortie au cours des n premières années, en tenant compte d'une cadence de disparition des bons risques;
— les primes supérieures ou égales à θ fois la prime de première année ne seront pas recouvrées.

Voici, sur l'exemple précédent, le barème des coefficients K'' des primes modelées que pourrait adopter une compagnie *W* dont le prix de revient de première année serait supérieur de 15 % à la prime qu'elle devrait adopter comme prime initiale, afin d'être bien placée dès la première année vis-à-vis de la concurrence.

On a admis $\theta = 1{,}3$, $n = 4$, cadence de disparition des bons risques = 10 % par an et on a limité le barème à $K'' = 1{,}5$ puisque la concurrence est très vive.

BAREME 3

Nombre de sinistres avec règlement	Nombre d'années d'observation						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0,95	0,90	0,90	0,80	0,70	0,60
1		1,45	1,20	1,00	0,95	0,85	0,75
2		1,50	1,50	1,40	1,25	1,10	1,00
3				1,50	1,40	1,40	1,25
4					1,50	1,50	1,50

L'usage de ce barème permet de compenser en 4 ans une insuffisance de 15 % de la prime de première année, mais entraîne pour

https://doi.org/10.1017/S051503610001059X Published online by Cambridge University Press

la compagnie W un investissement en réserves techniques de 15 % du chiffre d'affaires la première année, 12,8 % la deuxième et 5,6 % la troisième année.

5°) Le coefficient K' acquis par un assuré peut normalement être conservé lorsqu'il change de voiture, car ce coefficient caractérise beaucoup plus l'assuré que le véhicule. Notons que le risque d'un assuré peut se modifier au cours du temps en amélioration comme en aggravation. On pourra alors limiter l'application des barèmes aux 6, 8 ou 10 dernières années d'observation du risque.

6°) La prime modelée sur le risque fait automatiquement la surveillance du portefeuille car elle stabilise les bons risques et, en pénalisant les risques lourds, incite ces derniers à quitter l'assureur W. On aura donc avantage, lors de la souscription d'une nouvelle police, à demander dans la proposition d'assurance quels ont été les sinistres des dernières années précédentes pour établir la police avec une prime initiale normale, mais en tenant compte dès la première année d'un coefficient K' relatif aux antécédents.

7°) La formation, pour une compagnie, d'un tarif à prime modelée sur le risque nécessite pour chaque classe de tarif:

a) la connaissance statistique du coût total des sinistres par voiture-année pour la première année d'assurance, afin d'estimer la prime initiale qui dépend de la politique de recherche et d'acceptation des nouveaux risques;

b) la connaissance statistique de la distribution des nombres de voitures ayant eu 0, 1, 2, . . . sinistres avec règlement, afin de déterminer la forme analytique de la fonction $F(s)$ de répartition des risques et d'en estimer les paramètres. La fonction $F(s)$ permet alors de calculer les barèmes des multiplicateurs de correction de la prime initiale, dans la forme du barème 2.

Certaines régularités statistiques (voir [6]) qui apparaissent dans les fonctions $F(s)$ permettent de former seulement une famille de barèmes 2 correspondant à des fréquences probables croissant en progression géométrique.

c) la connaissance de la prime moyenne pratiquée par les compagnies concurrentes, afin de savoir si la compagnie W doit réduire sa prime initiale et former alors le barème correspondant du type du barème 3.

On voit que cette méthode de tarification utilise le coût total par voiture-année et une correction progressive d'après la fréquence observée des sinistres sur la voiture considérée; elle évite d'introduire le coût moyen des sinistres dont l'usage est dangereux par la déclaration toujours incertaine des petits sinistres. On pourrait, afin d'éviter l'effet de certaines irrégularités dans la déclaration de ces sinistres, ne les considérer qu'à partir d'un coût minimum tel que 50 Francs (US \$ 10.00). Ceci permettrait de corriger le fait que certains assurés ne déclareront pas leurs petits sinistres pour bénéficier d'une prime moindre dans l'avenir. Les barèmes de coefficients multiplicateurs devraient alors être modifiés en conséquence.

Pratiquement, le tarif d'assurance se présente sous la forme d'une énumération de modèles de véhicules, avec la description d'origine du risque et les garanties accordées. Pour chaque cas on indique le montant de la prime initiale et le numéro du barème à utiliser. Ce barème, qui sera reproduit sur la police, doit être pris dans la suite des barèmes qui couvrent l'éventail des fréquences moyennes observées. Pour un tarif d'assurance des voitures à 4 roues (sauf camions et autocars), 14 barèmes normaux et 14 barèmes majorés ont suffi pour tous les cas.

Conclusion

L'analyse statistique des accidents déclarés pour chaque véhicule a mis en évidence que dans des classes d'assurés, qu'on croit homogènes parce que tous ont à la fois les mêmes caractéristiques extérieures du risque, il existe de très fortes différences entre les risques individuels des assurés. On a alors cherché un modèle capable de donner une représentation statistiquement satisfaisante de la survenance des accidents.

Le principe d'équité nécessaire au bon fonctionnement des assurances veut qu'il soit demandé à chaque assuré une prime proportionnelle au risque qu'il présente à la mutualité.

L'association du modèle avec ce principe d'équité conduit à deux solutions dont une d'efficacité maximum est celle que nous avons désignée par *Prime modelée sur le risque*. C'est une méthode de tarification du risque individuel par les espérances mathématiques successives du risque liées par les sinistres déjà déclarés.

https://doi.org/10.1017/S051503610001059X Published online by Cambridge University Press

Cette méthode devrait être utilisée en partant d'une prime initiale déterminée de manière statistiquement correcte. Cependant, s'il n'en est pas ainsi elle reste bonne car l'estimation asymptotique de la prime est indépendante des erreurs qui ont pu être commises dans l'estimation de la prime initiale.

Les études des stratégies que peuvent adopter une ou plusieurs compagnies d'assurances pratiquant la prime modelée sur le risque si elles sont seules à le faire, ou bien toutes les compagnies si elles pratiquent cette même méthode, conduisent à trouver un équilibre du portefeuille de chacune de ces compagnies et donc, en cas de généralisation, un équilibre du marché de l'assurance automobile. Cet équilibre ne peut exister dans un marché où l'on utilise la prime du risque moyen, sauf par la constitution d'ententes ou de monopole de fait.

Bibliographie

[1] Depoid, P.: Etude de la fréquence et de la bonification pour non sinistre dans un portefeuille „Tous risques moderne". Bull. Trim. Inst. Actuaires Français, No. 227, Juin 1959, p. 103-123.

[2] Delaporte, P. J.: Quelques problèmes de Statistique Mathématique posés par l'assurance automobile et le bonus pour non sinistre. Bull. Trim. Inst. Actuaires Français, No. 227, Juin 1959, p. 87-102.

[3] Delaporte, P. J., Un problème de tarification de l'assurance accidents d'automobiles examiné par la Statistique Mathématique. Compte rendu du XVIe Congrès International d'Actuaires, Bruxelles 1960, vol. 2, p. 121-135.

[4] Delaporte, P. J.: Sur l'efficacité des critères de tarification de l'assurance contre les accidents d'automobiles. Colloque de l'A.S.T.I.N., Rättvik 1961. The ASTIN Bulletin, vol. II, part 1, Jan. 1962, p. 84-95. Reproduit dans: Bull. Trim. Inst. Actuaires Français, No. 238, Mars 1962, p. 41-51.

[5] Delaporte, P. J.: Problèmes de stratégie posés par la tarification de l'assurance contre les accidents d'automobiles et estimation progressive du risque d'accident. International Federation of Operational Research Societies, Proceeding 3d Conference, Oslo, July 1963, Dunod, Paris, p. 572-582.

[6] Delaporte, P. J.: L'estimation statistique progressive du risque individuel d'accident et la tarification de l'assurance automobile. Bull. of the International Statistical Institute, Ottawa 1963, t. 40, Ire livraison, p. 275-284.